F.P.R. Olsthoorn

Een inleiding in de beschrijvende verzamelingenleer

Bachelor Thesis, 2008

Thesis advisor: Dr. K.P. Hart

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Inleiding

Beschrijvende verzamelingenleer is de studie van definieerbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. We zijn geïnteresseerd in hoe goed deze verzamelingen zich gedragen. Vragen die wij proberen te beantwoorden zijn onder anderen: welke deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ voldoen aan de continuümhypothese (dat wil zeggen, hebben aftelbare cardinaliteit of de cardinaliteit van het continuüm), en welke deelverzamelingen zijn (Lebesgue)meetbaar.

We proberen zo groot mogelijke klassen te maken die een positief antwoord geven op voorgaande vragen door te beginnen met eenvoudig te beschrijven verzamelingen, zoals de open en gesloten verzamelingen, en vervolgens nieuwe verzamelingen te creëren door middel van simpele operaties zoals aftelbare verenigingen, complementen en continue beelden. We ordenen de zo verkregen verzamelingen de complexiteit van hun beschrijving.

In deze inleiding in de beschrijvende verzamelingenleer introduceren we een aantal belangrijke begrippen uit het vakgebied, namelijk de Poolse ruimten, in het bijzonder $2^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, de Borelverzamelingen en de analytische verzamelingen, en geven een aantal fundamentele eigenschappen van deze begrippen.

In hoofdstuk 1 behandelen we de Poolse ruimten. Dit zijn de topologische ruimten die van groot belang blijken te zijn voor de studie van $\mathbb{R}$.

In hoofdstuk 2 beschouwen we de Borelhiërarchie. In deze hiërarchie bouwen we de klasse der Borelverzamelingen van onder op door te beginnen met de open verzamelingen, vervolgens complementen toe te voegen, daarvan alle aftelbare verenigingen toe te voegen, van die verzamelingen weer de complementen erbij doen en zo verder. Herhaling van dit proces geeft uiteindelijk alle Borelverzamelingen in $\mathbb{R}$.

In hoofdstuk 3 bekijken we de analytische verzamelingen. Dit zijn projecties van Borelverzamelingen. Het blijkt dat elke Borelverzameling analytisch is, maar er is (in $\mathbb{R}$) een analytische verzameling die niet Borel is. We zullen dit bewijzen, en ook bewijzen dat elke analytische verzameling Lebesguemeetbaar is.

HOOFDSTUK 1

Poolse ruimten

De topologische ruimten die in de beschrijvende verzamelingenleer de voornaamste rol spelen, zijn de Poolse ruimten. Vragen uit de beschrijvende verzamelingenleer over $\mathbb{R}$ kunnen vaak makkelijker beantwoord worden in andere Poolse ruimten. Via inbeddingen, Borel-isomorfismen etcetera kunnen de antwoorden vervolgens teruggebracht worden naar inzichten over $\mathbb{R}$. Deze paragraaf biedt een korte inleiding.

1.1. Definitie. Een ruimte X is een **Poolse ruimte** als deze separabel en volledig metrizeerbaar is.

1.2. Propositie. *i) Een gesloten deelruimte van een Poolse ruimte is Pools.*
ii) Het product van aftelbaar veel Poolse ruimten is Pools.
iii) De directe som van aftelbaar veel Poolse ruimten is Pools.

Bewijs. Zij $F \subseteq X$ een gesloten deelruimte van een Poolse ruimte X. Aangezien een gesloten verzameling altijd de limiet van een convergent rijtje in die verzameling bevat, kunnen we als volledige metriek de beperking van de volledige metriek op X nemen. Zij $\{U_n\}$ een aftelbare basis voor X. Kies voor elke U_n een element uit $U_n \cap F$, als die doorsnede niet leeg is. Dit geeft een aftelbare verzameling in F waarvan de afsluiting gelijk is aan F.

Voor het bewijs van (ii) en (iii) verwijzen we naar [**Engelking**, paragrafen 2.2, 2.3, 4.2, 4.3]. □

1.3. Voorbeeld. De volgende ruimten zijn Pools: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{I} = [0, 1]$, elke aftelbare ruimte met de discrete topologie, $C(\mathbb{I})$ (de ruimte van continue functies van $\mathbb{I}$ naar $\mathbb{R}$ met de sup-norm), $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (de **Cantorruimte**), $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (de **Baireruimte**) en $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ (de **Hilbertkubus**). Alle hier genoemde ruimten hebben hun gebruikelijke topologie.

De Cantorruimte en de Baireruimte spelen een belangrijke rol in de beschrijvende verzamelingenleer. Wegens de volgende resultaten kunnen ze beschouwd worden als 'kanonieke' Poolse ruimten.

1.4. Stelling. *Zij X een niet-lege perfecte volledig metrizeerbare ruimte. Er bestaat een inbedding van $\mathcal{C}$ in X.*

Bewijs. We kiezen in X een familie gesloten bollen $(U_s)_{s \in 2^{<\mathbb{N}}}$ met de volgende eigenschappen:

i) $U_\emptyset = X$;
ii) $U_{s^\wedge 0} \cap U_{s^\wedge 1} = \emptyset$, voor $s \in 2^{<\mathbb{N}}$;
iii) $U_{s^\wedge i} \subseteq U_s$, voor $s \in 2^{<\mathbb{N}}$, $i \in \{0, 1\}$;
iv) $\mathrm{diam}(U_s) \leq 2^{-\mathrm{lengte}(s)}$.

(Stap (ii) is mogelijk omdat X perfect is.) Voor elke $x \in \mathcal{C}$ is $\bigcap_n U_{x\restriction n}$ een singleton, zeg $\{f(x)\}$, wegens de volledig metrizeerbaarheid van X. Immers, kies in elke verzameling $U_{x\restriction n}$ het middelpunt. Dit geeft een Cauchy rijtje aangezien de diameter van de bollen naar nul gaat, en het rijtje is convergent wegens de volledigheid. De limiet van het rijtje zit in de afsluiting van $\bigcap_n U_{x\restriction n}$, maar die verzameling is gesloten, dus zit de limiet in die verzameling. Tevens bevat $\bigcap_n U_{x\restriction n}$ ten hoogste één punt, wederom wegens de diameter die naar nul gaat.

De afbeelding $f : \mathcal{C} \to X$ is een inbedding. Hij is injectief wegens eigenschap (ii). Gegeven een open bol B om een punt $x \in f[\mathcal{C}]$ kunnen we, wegens eigenschap (iv), een gesloten bol U_s vinden zodanig dat $U_s \subseteq B$. Voor de basis-open verzameling $C_s \subseteq \mathcal{C}$ geldt $f[C_s] \subseteq U_s \subseteq B$. Dit bewijst dat f continu is. Voor de basis-open verzameling $C_s \subseteq \mathcal{C}$ is $f[C_s] = U_s \cap f[\mathcal{C}]$. Het complement hiervan in de deelruimte $f[\mathcal{C}]$ van X is de vereniging van eindig veel $U_t \cap f[\mathcal{C}]$, welke allemaal gesloten zijn in $f[\mathcal{C}]$ (namelijk de U_t met $t \neq s$ en lengte(t) = lengte(s); er zijn slechts eindig veel $t \in 2^{<\mathbb{N}}$ met vaste lengte). Er geldt dus dat $f[C_s]$ zelf open is in $f[\mathcal{C}]$. Dit voltooid het bewijs dat f een inbedding is van $\mathcal{C}$ in X. $\square$

1.5. Stelling (Cantor-Bendixson). *Zij X een Poolse ruimte. Er bestaat een decompositie $X = P \cup C$ met P een perfecte deelverzameling van X en C aftelbaar open.*

Er bestaat een aantal verschillende bewijzen voor deze stelling. Het bewijs dat wij hier geven is interessant omdat het idee dat hier gebruikt wordt ook toegepast wordt in het bewijs van deze stelling voor analytische verzamelingen in plaats van Poolse ruimten.

Bewijs. Zij K een ruimte. We noemen

$$K' = \{x \in K : x \text{ is een limietpunt van } K\}$$

de **Cantor-Bendixson afgeleide** van K. Als $x \in K$ geen limietpunt is van K, dan is er een open verzameling U met $x \in U$ en $U \cap K = \{x\}$, dus $U \cap K' = \emptyset$. Dit bewijst dat K' gesloten is in K. Verder is K perfect precies dan als $K = K'$.

Met transfiniete recursie over ORD maken we de geïtereerde Cantor-Bendixson afgeleiden van X als volgt:

$$\begin{aligned} X^0 &= X \\ X^{\alpha+1} &= (X^\alpha)' \\ X^\lambda &= \bigcap_{\alpha<\lambda} X^\alpha, \text{ als } \lambda \text{ een limietordinaalgetal is.} \end{aligned}$$

We verkrijgen aldus een transfiniete rij $(X^\alpha)_{\alpha \in \mathrm{ORD}}$ van gesloten deelruimten van X die dalend is wat betreft inclusie.

Stel de rij wordt na aftelbaar veel stappen constant, dat wil zeggen: er is een kleinste $\rho < \omega_1$ waarvoor geldt $X^\alpha = X^\rho$ voor alle $\alpha \geq \rho$. Zet $P = X^\rho$ en $C = \sim X^\rho$. Dan is $X = P \cup C$ een decompositie van X met P perfect en C aftelbaar open, en dit zullen we nu bewijzen. Dat P perfect is volgt uit het feit dat $P' = P$. Zij $\{U_n\}$ een aftelbare basis voor X. Voor elk geïsoleerd punt is $\{x\}$ open, dus gelijk aan een $\{U_n\}$. Dit betekent dat er slechts aftelbaar veel geïsoleerde punten in X bestaan, dus $\sim X'$ is aftelbaar. Verder is elke singleton $\{x\} \subseteq \sim X'$ open, dus is $\sim X'$ open. Stel $\sim X^\alpha$ is aftelbaar en open. Definieer voor $x \in X^\alpha \setminus X^{\alpha+1}$ het getal n_x als

$$n_x = \min\{n : U_n \cap X^\alpha = \{x\}\}.$$

Dit getal is welgedefinieerd, omdat voor elke $x \in X^\alpha \setminus X^{\alpha+1}$ geldt dat de verzameling $\{n : U_n \cap X^\alpha = \{x\}\}$ niet leeg is. Voor verschillende $x \in X^\alpha \setminus X^{\alpha+1}$ zijn de n_x verschillend, dus is $X^\alpha \setminus X^{\alpha+1}$ aftelbaar en bijgevolg is $\sim X^{\alpha+1}$ aftelbaar, en aangezien

$$\sim X^{\alpha+1} = \sim X^\alpha \cup \bigcup_{x \in X^\alpha \setminus X^{\alpha+1}} U_{n_x}$$

is $X^{\alpha+1}$ open.

Stel $\sim X^\alpha$ is aftelbaar en open voor alle $\alpha < \lambda$ met $\lambda \leq \rho$ een limietordinaalgetal, dan is X^λ ook aftelbaar en open. Immers, λ is zelf aftelbaar en de aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen is aftelbaar, en $\sim X^\alpha$ is de vereniging van open verzamelingen, dus open. We hebben aldus met transfiniete inductie aangetoond dat C aftelbaar en open is.

We bewijzen nu dat de rij inderdaad stabiliseert na aftelbaar veel stappen. Zij ρ de klasse van ordinaalgetallen α waarvoor geldt $X^\alpha \supsetneq X^{\alpha+1}$ (merk op dat ρ een beginstuk is van ORD). Voor elke $\alpha \in \rho$ bestaat er een $x \in X$ zodanig dat $x \in X^\beta$ voor alle $\beta \leq \alpha$, maar $x \notin X^{\alpha+1}$. Dat betekent dat er een U_n bestaat waarvoor geldt dat $x \in U_n$ en $U_n \cap X^\beta \supsetneq \{x\}$ voor alle $\beta < \alpha$, maar $U_n \cap X^\alpha = \{x\}$. Associeer α met de index n van deze U_n. Dit geeft een injectie $N : \rho \to \mathbb{N}$, dus ρ is aftelbaar. $\square$

1.6. Gevolg. *Elke overaftelbare Poolse ruimte X bevat een homeomorfe kopie van $\mathcal{C}$ en heeft cardinaliteit $2^{\aleph_0}$.*

Bewijs. $|X| \geq 2^{\aleph_0}$ volgt uit de inbedding van $\mathcal{C}$ in P, met P zoals in stelling 1.5, en $|X| \leq 2^{\aleph_0}$ volgt uit de separabiliteit van X. $\square$

Elke Poolse ruimte en elke gesloten verzameling in een Poolse ruimte voldoet dus aan de continuümhypothese. Verder bevat elke overaftelbare Poolse ruimte ook een homeomorfe kopie van $\mathcal{N}$, omdat er een inbedding van $\mathcal{N}$ in $\mathcal{C}$ bestaat:

1.7. Lemma. *Er bestaat een inbedding $i : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$.*

Bewijs. Definieer $0^n = 0 \dots 0$ (n keer). Voor $x \in \mathcal{N}$ zet $i(x) = 10^{x(0)}10^{x(1)}1 \dots$. Beschouw een open verzameling $C_s \cap i[\mathcal{N}]$ in het beeld van i. Deze verzameling legt een beperking op minder dan lengte(s) coördinaten van het volledig origineel, dus het volledig origineel is open. Dit bewijst dat i continu is. Het beeld van N_s, $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ onder i is de verzameling $C_t \cap i[\mathcal{N}]$ met $t = 10^{s(0)}1 \dots 0^{s(\text{lengte}(s)-1)}$. Deze verzameling is open in $i[\mathcal{N}]$. We concluderen dat $i : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ een inbedding is. $\square$

1.8. Stelling. *Zij X een Poolse ruimte. Dan is X een continu beeld van de Baireruimte.*

Bewijs. We kiezen in X een familie gesloten bollen $(B_s)_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ met de volgende eigenschappen:

i) $B_\emptyset = X$;
ii) $B_s \cap B_{s^\wedge i} \neq \emptyset$ voor alle $i \in \mathbb{N}$;
iii) $B_s \subseteq \bigcup_i B_{s^\wedge i}$;
iv) $\text{diam}(B_s) \leq 2^{-\text{lengte}(s)}$.

Deze constructie is mogelijk wegens de separabiliteit en metrizeerbaarheid van X.

Voor elke $x \in \mathcal{N}$ is $\bigcap_n B_{x \restriction n}$ een singleton, zeg $\{f(x)\}$, wegens hetzelfde argument als in 1.4. We bewijzen nu dat $f : \mathcal{N} \to X$ surjectief en continu is. Zij $y \in X$. Aangezien de $B_{\langle k \rangle}$, $k \in \mathbb{N}$, de ruimte X overdekken, is er een k_0 zó, dat $y \in B_{\langle k_0 \rangle}$. Deze bol wordt overdekt door de $B_{\langle k_0, k \rangle}$, dus er is een k_1 met $y \in B_{\langle k_0, k_1 \rangle}$. Aldus krijgen we een rij $x = \langle k_0, k_1, \ldots \rangle \in \mathcal{N}$ met de eigenschap dat $y \in \bigcap_n B_{x \restriction n}$, dus $y = f(x)$. We concluderen dat f surjectief is. Zij U een open bol met $y \in U$. Aangezien de diameter van de B_s naar 0 daalt, is er een n zodanig dat $B_{x \restriction n} \subseteq U$. Er geldt $B_{x \restriction n} = f[N_{x \restriction n}]$. Dit bewijst dat f continu is. $\square$

HOOFDSTUK 2

De Borelhiërarchie

1. Definitie en basiseigenschappen

Zij X een metrizeerbare ruimte. De klasse $\mathbf{B}(X)$ van Borelverzamelingen in X is de kleinste σ-algebra die alle open verzamelingen in X bevat. Het is duidelijk dat de open, gesloten, F_σ- en G_δ-verzamelingen bevat zijn in $\mathbf{B}(X)$, maar hoe zien de andere Borelverzamelingen eruit? Om een beter inzicht te krijgen in de structuur van $\mathbf{B}(X)$ bouwen we de volgende hiërarchie op.

We nemen aan dat X ook metrizeerbaar is. Voor elk aftelbaar ordinaalgetal ξ definiëren we via transfinitie recursie klassen $\Sigma^0_\xi(X)$ en $\Pi^0_\xi(X)$ van deelverzamelingen van X, de **Borelklassen**, als volgt:

$$\begin{aligned}
\Sigma^0_1(X) &= \{U \subseteq X : U \text{ is open}\},\\
\Pi^0_\xi(X) &= \{U \subseteq X : \sim U \in \Sigma^0_\xi(X)\},\\
\Sigma^0_\xi(X) &= \{\bigcup_n A_n : A_n \in \Pi^0_{\xi_n}, \xi_n < \xi, n \in \mathbb{N}\}, \text{ als } \xi > 1
\end{aligned}$$

Verder noemen we

$$\Delta^0_\xi(X) = \Sigma^0_\xi(X) \cap \Pi^0_\xi(X)$$

de **ambigue klassen**.

De eerste paar niveau's in de hiërarchie zijn eenvoudig te beschrijven. $\Pi^0_1(X)$ bestaat uit de gesloten verzamelingen, $\Delta^0_1(X)$ de clopen verzamelingen, $\Sigma^0_2(X)$ de F_σ-verzamelingen en $\Pi^0_2(X)$ de G_δ-verzamelingen. Wegens de metrizeerbaarheid van X is elke gesloten verzameling in X een G_δ-verzameling. Via complementen is dus elke open verzameling een F_σ-verzameling en natuurlijk is elke open verzameling een G_δ-verzameling en elke gesloten verzameling een F_σ-verzameling, zodat we vinden dat $\Sigma^0_1(X) \cup \Pi^0_1(X) \subseteq \Delta^0_2(X)$. Het is nu verder met inductie eenvoudig in te zien dat voor elke ξ tussen 0 en ω_1 geldt

$$\Sigma^0_\xi(X) \cup \Pi^0_\xi(X) \subseteq \Delta^0_{\xi+1}(X). \tag{2.1}$$

Uit (2.1) volgt dat $\bigcup_{\xi<\omega_1} \Sigma^0_\xi(X)$ gesloten is onder complementen. Stel we hebben een rij verzamelingen uit $\bigcup_{\xi<\omega_1} \Sigma^0_\xi(X)$ en $\{\alpha_i\}$ is de rij indices van de $\Sigma^0_{\alpha_i}(X)$ waarin deze verzamelingen zitten. Wegens (2.1) zit de vereniging van de rij verzamelingen in $\Sigma^0_{\sup\{\alpha_i\}}(X)$, en $\sup\{\alpha_i\} = \bigcup_i \alpha_i$ is een aftelbaar ordinaalgetal, dus kleiner dan ω_1 (we gebruiken hier het aftelbare keuzeaxioma). Dit bewijst dat $\bigcup_{\xi<\omega_1} \Sigma^0_\xi(X)$ een σ-algebra is. Aangezien men eenvoudig met transfiniete inductie bewijst dat elke klasse bevat is in $\mathbf{B}(X)$, volgt

$$\mathbf{B}(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Sigma^0_\xi(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Pi^0_\xi(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Delta^0_\xi(X). \tag{2.2}$$

2.3. Voorbeeld. Beschouw in $X = C(\mathbb{I}) \times \mathbb{I}$ de deelruimte $D = \{(f, x) : f \text{ is differentieerbaar in } x\}$. Deze verzameling is Borel, en meer in het bijzonder geldt $D \in \Pi^0_3(X)$.

Bewijs. Een functie $f \in C(\mathbb{I})$ is differentieerbaar in x dan en slechts dan als

$$\forall n \exists m \forall p, q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} \quad \left(|x - p| < \frac{1}{m} \wedge |x - q| < \frac{1}{m} \right) \Rightarrow \left(\left| \frac{f(p) - f(x)}{p - x} - \frac{f(q) - f(x)}{q - x} \right| \leq \frac{1}{n} \right). \tag{2.4}$$

Noem de binnenste conditie in (2.4) ϕ, en definieer voor $p, q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{I}$ en $n, m \in \mathbb{N}$ de verzameling $F(p, q, n, m) = \{(f, x) \in X : \phi(p, q, n, m, f, x)\}$. Uit (2.4) volgt dat D gegeven wordt door

$$D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{p,q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{I}} F(p, q, n, m).$$

De verzameling $F(p, q, n, m)$ is gesloten in X, dus $D \in \Pi^0_3$. □

Merk op dat de existentiële kwantor overeenkomt met de vereniging nemen en de universele kwantor overeenkomt met de doorsnede nemen.

De Borelklassen hebben een aantal afsluitingseigenschappen:

2.5. Propositie. *Voor elke aftelbare ξ zijn de klassen Σ^0_ξ, Π^0_ξ en Δ^0_ξ gesloten onder eindige verenigingen en doorsneden en continue volledige originelen (dat wil zeggen als $f : X \to Y$ continu is en $A \subseteq Y$ is een element van $\Gamma(Y)$, waarbij Γ één van de eerder genoemde klassen is, dan is $f^{-1}[A] \in \Gamma(X)$). Verder is Σ^0_ξ gesloten onder aftelbare verenigingen, Π^0_ξ onder aftelbare doorsneden en Δ^0_ξ onder complementen.*

Bewijs. Dat de ambigue klassen gesloten zijn onder complementen volgt direct uit de definitie. Voor $\xi = 1$ zegt de propositie dat de aftelbare vereniging en eindige doorsnede van open verzamelingen open is, de aftelbare doorsnede en eindige vereniging van gesloten verzamelingen gesloten is en het volledige origineel van open en gesloten verzamelingen onder continue afbeeldingen open respectievelijk gesloten is, hetgeen simpele topologische uitspraken zijn. Het bewijs loopt verder met inductie naar ξ. □

2. Codering en universele verzamelingen

In paragraaf 1 hebben we gezien dat het voldoende is om ω_1 niveau's hoog te gaan in de Borel hiërarchie om de Borel σ-algebra te krijgen, maar is dit ook nodig? We kunnen snel inzien dat het *mogelijk* niet voldoende is om eerder te stoppen. Immers, stel we stoppen bij een aftelbaar ordinaalgetal α. Zij $\{\beta_i\}$ een stijgende rij ordinalen met $\sup\{\beta_i + 1\} = \alpha$. Als we voor elke i een $A_i \in \Sigma^0_{\beta_i}(X)$ kiezen, dan is er geen garantie dat $\bigcup_i A_i \in \bigcup_{\xi < \alpha} \Sigma^0_\xi(X)$.

De **Bairerang** van X, die wij met $\operatorname{rang}(X)$ zullen noteren, is het kleinste ordinaalgetal $\alpha \leq \omega_1$ waarvoor geldt dat elke Borelverzameling in X een element van $\Sigma^0_\alpha(X)$ is (per conventie is $\Sigma^0_{\omega_1}(X) = \bigcup_{\xi < \omega_1} \Sigma^0_\xi(X)$). Er geldt dat $\operatorname{rang}(X) = 1$ dan en slechts dan als X discreet is. Als X een aftelbare Poolse ruimte is dan is elke deelverzameling een F_σ verzameling omdat elke singleton in een volledig metrizeerbare ruimte gesloten is, dus in dat geval is $\operatorname{rang}(X) \leq 2$. We zullen in het vervolg aantonen dat als X overaftelbaar en Pools is dan $\text{rang}(X) = \omega_1$. Het bewijs hiervan hangt af van het bestaan van universele verzamelingen voor de klassen in die hiërarchie.

2.6. Definitie. Zij Γ een klasse van verzamelingen in verschillende ruimten (zoals Σ^0_ξ). Een verzameling $\mathcal{U} \subseteq Y \times X$ heet **Y-universeel voor** $\Gamma(X)$ als $\mathcal{U} \in \Gamma(Y \times X)$ en $\{\mathcal{U}_y : y \in Y\} = \Gamma(X)$ ($\mathcal{U}_y$, de *y-sectie* van $\mathcal{U}$, is de verzameling $\mathcal{U}_y = \{x \in X : (y,x) \in \mathcal{U}\}$). Een dergelijke universele verzameling geeft een **codering** van de verzamelingen in $\Gamma(X)$, waarbij y de code is voor de verzameling $\mathcal{U}_y$.

2.7. Stelling. *Zij X een separabele metrizeerbare ruimte. Voor elke $\xi \geq 1$ bestaat er een $\mathcal{C}$-universele verzameling voor $\Sigma^0_\xi(X)$ en evenzo voor $\Pi^0_\xi(X)$.*

Bewijs. We doen transfiniete inductie over ORD. Zij $\{U_n\}$ een aftelbare basis voor X. Definieer $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C} \times X$ door

$$\mathcal{U} = \left\{(y,x) \in \mathcal{C} \times X : x \in \bigcup\{U_n : y(n) = 0\}\right\}.$$

Er geldt $\mathcal{U} = \bigcup_n A_n \times U_n$, waarbij $A_n = \{y \in \mathcal{C} : y(n) = 0\}$. De A_n zijn open verzamelingen, dus $\mathcal{U} \in \Sigma^0_1(\mathcal{C} \times X)$. Elke y-sectie van $\mathcal{U}$ is de vereniging van basis-open verzamelingen: $\mathcal{U}_y = \bigcup\{U_n : y(n) = 0\}$, dus $\{\mathcal{U}_y : y \in \mathcal{C}\} \subseteq \Sigma^0_1(X)$. Voor de omgekeerde inclusie merken op dat, als $G \subseteq X$ open is, dat $G = \mathcal{U}_y$ waarbij $y(n) = 0 \Leftrightarrow U_n \subseteq G$. We concluderen dat $\mathcal{U}$ een $\mathcal{C}$-universele verzameling is voor $\Sigma^0_1(X)$.

Als $\mathcal{U}$ een Y-universele verzameling is voor $\Gamma(X)$, dan is $\sim\mathcal{U}$ een Y-universele voor de duale klasse $\check{\Gamma}(X)$. We hebben dus het bestaan van een $\mathcal{C}$-universele verzameling voor $\Pi^0_1(X)$ aangetoond, en als er een $\mathcal{C}$-universele verzameling voor $\Sigma^0_\xi(X)$ bestaat, dan is er ook een voor $\Pi^0_\xi(X)$.

Neem nu aan dat $\mathcal{C}$-universele verzamelingen $\mathcal{U}_\eta$ bestaan voor $\Pi^0_\eta(X)$ voor elke $\eta < \xi$. Zij $\eta_n < \xi$, $n \in \mathbb{N}$, zo dat $\eta_n \leq \eta_{n+1}$ en $\sup\{\eta_n + 1 : n \in \mathbb{N}\} = \xi$. Voor elke $y \in \mathcal{C}$, zij $(y)_n \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$, gedefinieerd door $(y)_n(m) = y(\phi(n,m))$, waarbij ϕ een bijectie is van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$. Definieer $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C} \times X$ door

$$\mathcal{U} = \{(y,x) \in \mathcal{C} \times X : \exists n((y)_n, x) \in \mathcal{U}_{\eta_n}\}.$$

We bewijzen eerst dat $\mathcal{U} \in \Sigma^0_\xi(\mathcal{C} \times X)$. Beschouw daartoe de rij afbeeldingen

$$\begin{array}{rccc} \pi_n: & \mathcal{C} \times X & \longrightarrow & \mathcal{C} \times X \\ & (y,x) & \longmapsto & ((y)_n, x). \end{array}$$

Merk op dat $\mathcal{U} = \bigcup_n \pi_n^{-1}[\mathcal{U}_{\eta_n}]$, dus als alle π_n continu zijn dan zijn we wegens propositie 2.5 klaar. Als de samenstellingen $\pi_X \circ \pi_n$ en $\pi_\mathcal{C} \circ \pi_n$ continu zijn, dan is π_n continu. Voor de eerste samenstelling geldt $\pi_X \circ \pi_n = \pi_X$, dus die is continu. Voor de andere samenstelling geldt $\pi_\mathcal{C} \circ \pi_n = f_n \circ \pi_\mathcal{C}$ met $f_n(y) = (y)_n$. Gegeven $y \in \mathcal{C}$ zij A_k de basis-open gegeven door $x \in A_k \Leftrightarrow x(k) = y(k)$; dan is $f_n^{-1}[A_k]$ de basis-open gegeven door $z \in f_n^{-1}[A_k] \Leftrightarrow z(\phi(n,k)) = y(k)$, dus f_n — en bijgevolg $\pi_\mathcal{C} \circ \pi_n$ — is continu.

Aangezien $\sup\{\eta_n + 1 : n \in \mathbb{N}\} = \xi$ is wegens (2.1) elk element uit $\Sigma^0_\xi(X)$ te schrijven als aftelbare vereniging van elementen uit de $\Pi^0_{\eta_n}(X)$: als $A \in \Sigma^0_\xi(X)$, dan is $A = \bigcup_n (\mathcal{U}_{\eta_n})_{y_n}$ voor een zekere rij $(y_n) \in \mathcal{C}^\mathbb{N}$. Voor elke rij $(y_n) \in \mathcal{C}^\mathbb{N}$ bestaat er een $y \in \mathcal{C}$ zodanig dat $y_n = (y)_n$ voor alle n, namelijk de y gegeven door

$y(n) = y_{\phi_1^{-1}(n)}(\phi_2^{-1}(n))$. Tevens is $\mathcal{U}_y = \bigcup_n (\mathcal{U}_{\eta_n})_{(y)_n}$ voor elke $y \in \mathcal{C}$. Bijgevolg is elk element uit $\Sigma^0_\xi(X)$ gelijk aan een $\mathcal{U}_y$. We concluderen dat $\mathcal{U}$ een $\mathcal{C}$-universele verzameling voor $\Sigma^0_\xi(X)$ is. $\square$

2.8. STELLING. *Zij X een overaftelbare Poolse ruimte. Dan geldt voor elke ξ dat $\Sigma^0_\xi(X) \neq \Pi^0_\xi(X)$. Bijgevolg is $\Delta^0_\xi(X) \subsetneq \Sigma^0_\xi(X) \subsetneq \Delta^0_{\xi+1}(X)$ en evenzo voor $\Pi^0_\xi(X)$, zodat* $\mathrm{rang}(X) = \omega_1$.

BEWIJS. Aangezien X overaftelbaar is kunnen we aannemen dat $\mathcal{C} \subseteq X$, dus $\Sigma^0_\xi(\mathcal{C}) = \Sigma^0_\xi(X)|\mathcal{C}$ en evenzo voor $\Pi^0_\xi(\mathcal{C})$. Zij $\mathcal{U}$ een $\mathcal{C}$-universele verzameling voor $\Sigma^0_\xi(\mathcal{C})$. Beschouw de verzameling $A \subseteq \mathcal{C}$ gegeven door $y \in A \Leftrightarrow (y, y) \notin \mathcal{U}$. Aangezien $A = \psi^{-1}[\sim\mathcal{U}]$, waarbij ψ de continue functie gegeven door $\psi(y) = (y, y)$ is, en $\sim\mathcal{U} \in \Pi^0_\xi(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ geldt wegens propositie 2.5 $A \in \Pi^0_\xi(\mathcal{C})$. Maar er kan niet gelden $A \in \Sigma^0_\xi(\mathcal{C})$, want anders is er een $y_0 \in \mathcal{C}$ met $A = \mathcal{U}_{y_0}$, en voor die y_0 geldt $y_0 \in A \Leftrightarrow y_0 \notin A$. $\square$

De Continuüm Hypothese impliceert dat voor elke $\alpha \leq \omega_1$ er een $X \subseteq \mathbb{R}$ bestaat met $\mathrm{rang}(X) = \alpha$. Zie [**Miller**] voor een bewijs van deze bewering.

HOOFDSTUK 3

Analytische Verzamelingen

1. Definitie en basiseigenschappen

In lemma 2.5 is een aantal afsluitingseigenschappen van de klasse van Borelverzamelingen gegeven. Er staat niet genoemd dat de klasse van Borelverzamelingen gesloten is onder het nemen van continue beelden, en wel om een goede reden: die bewering is in het algemeen niet waar. In dit hoofdstuk beschouwen we de klasse van verzamelingen die het continue beeld van een Borelverzameling zijn.

3.1. DEFINITIE. Zij X een Poolse ruimte. Een deelverzameling $A \subseteq X$ heet **analytisch** als $A = f[Y]$, waarbij Y een Poolse ruimte is en $f : Y \to X$ continu is.

De klasse van analytische verzamelingen in een Poolse ruimte X noteren we met $\Sigma^1_1(X)$. De klasse van complementen van analytische verzamelingen, de **co-analytische verzamelingen**, noteren we met $\Pi^1_1(X)$. We begonnen deze paragraaf met de belofte de continue beelden van Borelverzamelingen te behandelen, maar in 3.1 definieren we analytische verzamelingen als de continue beelden van Poolse ruimten. In de volgende propositie bewijzen we dat dit equivalente definities zijn.

3.2. PROPOSITIE. *Zij X een Poolse ruimte en $A \subseteq X$ een niet-lege deelverzameling. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(1) A is analytisch.
(2) $A = f[\mathcal{N}]$, met $f : \mathcal{N} \to X$ continu.
(3) $A = f[B]$, met $B \subseteq Y$ een Borelverzameling, Y een Poolse ruimte en $f : Y \to X$ continu.
(4) $A = \mathrm{proj}_X(G)$, met $G \subseteq X \times \mathcal{N}$ een gesloten verzameling.
(5) $A = \mathrm{proj}_X(B)$, met $B \subseteq X \times Y$ een Borelverzameling en Y een Poolse ruimte.

BEWIJS.

(1)⇒(2) Dit volgt uit 1.8.
(2)⇒(3) $\mathcal{N}$ is een Poolse ruimte en een Borelverzameling in $\mathcal{N}$.
(3)⇒(4) Wegens 1.8 is $Y = g[\mathcal{N}]$ met $g : \mathcal{N} \to Y$ continu. Verder is F, de grafiek van $(f \circ g)^{-1}$, een gesloten verzameling in $X \times \mathcal{N}$. Aangezien $A = \mathrm{proj}_X(F)$ volgt de implicatie.
(4)⇒(5) Elke gesloten verzameling is een Borelverzameling.
(5)⇒(1) Elke gesloten verzameling in een Poolse ruimte is analytisch, omdat elke gesloten deelruimte van een Poolse ruimte zelf ook Pools is. Als elke Borelverzameling in een Poolse ruimte Y de projectie van een gesloten verzameling in $Y \times \mathcal{N}$ is, volgt de implicatie, aangezien projectie een continue afbeelding is. We bewijzen nu die bewering.

Wegens het feit dat $\mathbf{B}(Y)$ opgebouwd wordt via de Borelhiërarchie (zie 1), is het voldoende te bewijzen dat de klasse P van deelverzamelingen van Y die de projecties van gesloten verzamelingen in $Y \times \mathcal{N}$ zijn alle open en gesloten verzamelingen bevat en gesloten is onder het aftelbare verenigingen en doorsneden. Natuurlijk bevat P de gesloten verzamelingen, en daar elke open verzameling de aftelbare vereniging van gesloten verzameling is (omdat Y metrizeerbaar is), hoeven we alleen te bewijzen dat P gesloten is onder aftelbare verenigingen en doorsneden.

We bewijzen eerst dat P gesloten is onder aftelbare verenigingen. Zij gegeven een rij verzamelingen $A_n \in P$, definieer $A = \bigcup_n A_n$ en zij $F_n \subseteq Y \times \mathcal{N}$ gesloten verzamelingen met $A_n = \mathrm{proj}_Y(F_n)$. Definieer $\mathcal{N}_n$ als de deelruimte van $\mathcal{N}$ gegeven door $\mathcal{N}_n = \{y \in \mathcal{N} : y(0) = n\}$. Het is gemakkelijk na te gaan dat $\mathcal{N}_n$ homeomorf is met $\mathcal{N}$ en dat $\mathcal{N} = \bigoplus_n \mathcal{N}_n$. Zij $G_n = \{\langle x, n^\wedge s\rangle : \langle x, s\rangle \in F_n\}$. Elke G_n is een homeomorfe kopie van F_n in $Y \times \mathcal{N}_n$. Merk op dat $G = \bigcup_n G_n$ gesloten is in $Y \times \mathcal{N}$. Immers, elke G_n is gesloten in $Y \times \mathcal{N}_n$ en de deelruimten $Y \times \mathcal{N}_n$ zijn clopen en onderling disjunct. Voor elk punt in het complement van G geldt dus dat dat punt in precies één deelruimte $Y \times \mathcal{N}_n$ ligt, en in die deelruimte bestaat een open verzameling om dat punt die disjunct is van G_n, en dus disjunct van G. Er geldt $A = \mathrm{proj}_Y(G)$ en dit voltooid het bewijs.

Zij gegeven een rij verzamelingen $A_n \in P$, definieer $A = \bigcap A_n$ en zij $F_n \subseteq Y \times \mathcal{N}$ gesloten verzamelingen met $A_n = \mathrm{proj}_Y(F_n)$. Er geldt

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow \forall n \exists p_n (x, p_n) \in F_n \\ &\Leftrightarrow \exists (p_n)_n \forall n (x, p_n) \in F_n. \end{aligned}$$

Beschouw de verzameling $F \subseteq X \times \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ gegeven door

$$(x, (p_n)_n) \in F \Leftrightarrow \forall n (x, p_n) \in F_n.$$

Er geldt dus $A = \mathrm{proj}_X(F)$. Aangezien $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ homeomorf is met $\mathcal{N}$, hoeven we alleen nog aan te tonen dat F een gesloten verzameling is in $X \times \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$. Hiervoor merken we op dat

$$F = \Pi_n F_n \cap (\Delta X \times \mathcal{N}^{\mathbb{N}}),$$

waarbij we $\Pi_n F_n$ als deelverzameling van $\Pi_n(X \times \mathcal{N}) = X^{\mathbb{N}} \times \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ zien. De diagonaal ΔX is gesloten en $\Pi_n F_n$ is gesloten, dus F is gesloten.

□

Uit 3.2 volgt dat elke Borelverzameling een analytische verzameling is, oftewel $\mathbf{B}(X) \subseteq \Sigma^1_1(X)$. De omgekeerde inclusie geldt in het algemeen niet. Voor het bewijs hiervan hebben we wederom het begrip universele verzameling nodig (zie 2.6)

3.3. Stelling (Souslin). *Zij X een overaftelbare Poolse ruimte. Dan bestaat er een analytische verzameling in X die niet Borel is.*

Bewijs. We merken eerst op dat er een $\mathcal{N}$-universele verzameling $\mathcal{U}$ bestaat voor $\Sigma^0_1(\mathcal{N})$. De definitie van $\mathcal{U}$ is vrijwel hetzelfde als die van de $\mathcal{C}$-universele verzameling voor $\Sigma^0_1(X)$ in 2.7:

$$(y, x) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x \in \bigcup \{U_n : y(n) = 0\},$$

waarbij $\{U_n\}$ een aftelbare basis voor $\mathcal{N}$ is.

Aangezien $\mathcal{N}^2$ homeomorf is met $\mathcal{N}$, bestaat er dus een $\mathcal{N}$-universele verzameling voor $\Sigma_1^0(\mathcal{N}^2)$ en bijgevolg ook een $\mathcal{N}$-universele verzameling $\mathcal{F}$ voor $\Pi_1^0(\mathcal{N}^2)$. We bewijzen nu dat de verzameling $\mathcal{A} = \{(y,x) : \exists z(y,x,z) \in \mathcal{F}\}$ een $\mathcal{N}$-universele verzameling is voor $\Sigma_1^1(\mathcal{N})$. Merk op dat $\mathcal{A} = \mathrm{proj}_{\mathcal{N}^2}(\mathcal{F})$ en dat voor elke sectie $\mathcal{A}_y$ geldt

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_y &= \{x \in \mathcal{N} : (y,x) \in \mathcal{A}\}\\ &= \{x \in \mathcal{N} : \exists z(y,x,z) \in \mathcal{F}\}\\ &= \{x \in \mathcal{N} : \exists z(x,z) \in \mathcal{F}_y\}\\ &= \mathrm{proj}_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_y).\end{aligned}$$

Daar de projectie-afbeelding continu is, zijn $\mathcal{A}$ en alle secties $\mathcal{A}_y$ analytisch. Andersom, stel $A \subseteq \mathcal{N}$ is een niet-lege analytische verzameling. Wegens 3.2(4) is $A = \mathrm{proj}_{\mathcal{N}}(F)$ met $F \subseteq \mathcal{N}^2$ een gesloten verzameling. Voor F geldt dat er een $y \in \mathcal{N}$ bestaat met $F = \mathcal{F}_y$. Bijgevolg is $A = \mathcal{A}_y$. De lege verzameling is de projectie van de lege verzameling in het vlak. De lege verzameling in het vlak is gesloten, dus gelijk aan $\mathcal{F}_y$ voor een $y \in \mathcal{N}$.

De verzameling $\mathcal{A}$ is echter geen Borelverzameling. Om dit te bewijzen gebruiken we hetzelfde diagonaalargument als in 2.8. Stel $\mathcal{A}$ is wel Borel, dan is $\sim\mathcal{A}$ dat ook, en bijgevolg $A = \{x \in \mathcal{N} : (x,x) \notin \mathcal{A}\}$ ook, want $A = \psi^{-1}[\sim\mathcal{A}]$ waarbij ψ de continue functie gegeven door $\psi(x) = (x,x)$ is. Maar dan is A ook analytisch, dus $A = \mathcal{A}_y$ voor een $y \in \mathcal{N}$ en voor die y geldt $y \in A \Leftrightarrow y \notin A$. Hiermee is de stelling bewezen voor $X = \mathcal{N}$.

Elke overaftelbare Poolse ruimte X bevat een homeomorfe kopie van $\mathcal{N}$ (zie 1.6 en de opmerking daarna), dus is in het algemeen de stelling bewezen. □

2. Voorbeelden van analytische verzamelingen

3.4. Voorbeeld. De verzamelingen ND en UD van nergens differentieerbare functies in $C(\mathbb{I})$, respectievelijk overal differentieerbare functies in $C(\mathbb{I})$, zijn co-analytisch.

Bewijs. Beschouw de verzameling D uit 2.3. Zij ID de verzameling van ergens differentieerbare functies in $C(\mathbb{I})$. Er geldt dat $\mathrm{ID} = \mathrm{proj}_{C(\mathbb{I})}(D)$, en aangezien D Borel is volgt uit 3.2 (5) dat ID analytisch is. Er volgt dat ND co-analytisch is, daar $\mathrm{ND} = \sim\mathrm{ID}$. Verder is UD het complement van IND, de verzameling van ergens niet differentieerbare functies in $C(\mathbb{I})$. Aangezien $\mathrm{IND} = \mathrm{proj}_{C(\mathbb{I})}(\sim D)$ en $\sim D$ Borel is, is UD co-analytisch. □

De analytische verzameling die niet Borel is uit 3.3 is in zekere zin een gekunsteld object. De verzamelingen ND en UD zijn voorbeelden van verzamelingen met een simpele beschrijving die co-analytisch zijn maar niet Borel. We hebben bewezen dat ze inderdaad co-analytisch zijn, maar bewijzen dat ze niet Borel zijn is een stuk gecompliceerder. Voor het volledige bewijs refereren we de lezer naar [**Mauldin**] voor ND en naar [**Mazurkiewicz**] voor UD. Beide bewijzen bestaan uit het inbedden van $\mathcal{C}$ in $C(\mathbb{I})$ zó dat $C \cap \mathrm{ID}$ respectievelijk $C \cap \mathrm{IND}$ gelijk is aan de verzameling $\mathcal{A}$ uit 3.3.

3. Lebesguemeetbaarheid

Een belangrijk resultaat van Lusin zegt dat elke analytische verzameling universeel meetbaar is (zie [**Kechris**, 21.10]). Dit zullen we in deze scriptie niet bewijzen. We zullen alleen aantonen dat elke analytische verzameling in $\mathbb{R}^n$ Lebesguemeetbaar is (in het vervolg zeggen we kortweg meetbaar in plaats van Lebesguemeetbaar). Voor het bewijs hiervan gebruiken we de volgende operatie.

3.5. Definitie. Een **Souslinschema** op een verzameling X is een familie $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ van deelverzamelingen van X geïndiceerd door $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. We noteren

$$\mathcal{A}_s P_s = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \bigcap_n P_{x\restriction n}$$

en zeggen dat $\bigcup_{x\in\mathcal{N}} \bigcap_n P_{x\restriction n}$ verkregen wordt uit $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ door de **Souslinoperatie** $\mathcal{A}$ toe te passen.

Gegeven een klasse Γ van deelverzameligen van X geven we met $\mathcal{A}\Gamma$ de klasse van verzamelingen $\mathcal{A}_s P_s$ aan, waarbij de P_s in Γ zitten.

3.6. Stelling. *Elke analytische verzameling $A \subseteq \mathbb{R}^2$ is Lebesguemeetbaar.*

Bewijs. Zij $A \subseteq \mathbb{R}^2$ een analytische verzameling. We zoeken een meetbare verzameling $B \supseteq A$ zó, dat $B \setminus A$ een nulverzameling, want dan is $A = B \setminus (B \setminus A)$ Lebesguemeetbaar.

Zij $f : \mathcal{N} \to \mathbb{R}^n$ continu met $f[\mathcal{N}] = A$. Beschouw het Souslinschema $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ gegeven door $P_s = f[N_s]$. Voor dit Souslinschema geldt

$$A = \mathcal{A}_s P_s = \mathcal{A}_s \overline{P_s}, \tag{3.7}$$

en voor elke $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$,

$$P_s = \bigcup_n P_{s^\wedge n}. \tag{3.8}$$

We bewijzen (3.7). Stel $y \in f[\mathcal{N}]$. Zij $x \in \mathcal{N}$ zó dat $f(x) = y$. Voor elke N_s waarbij $x \in N_s$ geldt $y \in P_s$, oftewel $y \in \bigcap_n P_{x\restriction n}$, dus $y \in \mathcal{A}_s P_s$. De inclusie $\mathcal{A}_s P_s \subseteq \mathcal{A}_s \overline{P_s}$ is duidelijk. Stel $y \in \mathcal{A}_s \overline{P_s}$. Zij $x \in \mathcal{N}$ zó dat $y \in \bigcap_n \overline{P_{x\restriction n}}$. Aangezien de diameter van de $\overline{P_{x\restriction n}}$ naar 0 gaat en omdat $\mathcal{N}$ volledig is, bevat hun doorsnede precies één element. De doorsnede $\bigcap_n P_{x\restriction n}$ is bevat in $\bigcap_n \overline{P_{x\restriction n}}$, dus het is voldoende om aan te tonen dat $\bigcap_n P_{x\restriction n}$ niet leeg is; dan is $y \in \mathcal{A}_s P_s$. Merk op dat $f(x)$ in elke $P_{x\restriction n}$ zit. Dit bewijst de inclusies $\mathcal{A}_s \overline{P_s} \subseteq \mathcal{A}_s P_s \subseteq A$.

Volgens het lemma op pagina 17 bestaat er voor elke $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ een meetbare verzameling $B_s \supseteq P_s$ met de eigenschap dat elke meetbare deelverzameling een nulverzameling is. Daar elke $\overline{P_s}$ meetbaar is, kunnen we meetbare verzamelingen B_s vinden zodanig dat $P_s \subseteq B_s \subseteq \overline{P_s}$.

Zet $B = B_\emptyset$. Aangezien B meetbaar is, zijn we klaar als we bewijzen dat $B \setminus A$ een nulverzameling is. Wegens de inclusies $P_s \subseteq B_s \subseteq \overline{P_s}$ en (3.7) geldt $A = \mathcal{A}_s B_s$, en dus

$$B \setminus A = B \setminus \mathcal{A}_s B_s.$$

Zet $Z_s = B_s \setminus \bigcup_n B_{s^\wedge n}$. We beweren dat elke Z_s een nulverzameling is, en dat de inclusie

$$B \setminus \mathcal{A}_s B_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} Z_s \tag{3.9}$$

geldt. Dan is $\bigcup_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} Z_s$ een nulverzameling, omdat $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ een aftelbare verzameling is, en dus is $B \setminus \mathcal{A}_s B_s$ een nulverzameling.

We bewijzen eerst (3.9). Merk op dat het rechterlid in 3.9 een deelverzameling van B is, omdat $B_s \subseteq B$ voor elke $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Zij $x \in B$ zó, dat x geen element is van het rechterlid in (3.9). Er geldt

$$x \notin \bigcup_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} Z_s \Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}(x \in B_s \Rightarrow \exists k(x \in B_{s^\wedge k})).$$

Aangezien $x \in B_\emptyset = B$ is er een k_0 zodanig dat $x \in B_{\langle k_0\rangle}$, dus is er een k_1 zodanig dat $x \in B_{\langle k_0,k_1\rangle}$, enzovoorts. Zij $a = \langle k_0, k_1, \ldots\rangle$ het rijtje dat we zo krijgen, dan geldt $x \in \bigcap_n B_{a\restriction n}$, dus $x \notin B \setminus \mathcal{A}_s B_s$. Dit bewijst de inclusie (3.9).

We bewijzen nu dat elke Z_s een nulverzameling is. Elke Z_s is meetbaar, omdat alle B_s meetbaar zijn. Wegens de inclusies $P_s \subseteq B_s$ en (3.8) hebben we

$$Z_s \subseteq B_s \setminus \bigcup_n P_{s^\wedge n} = B_s \setminus P_s.$$

Uit de inclusie $Z_s \subseteq B_s \setminus P_s$ en de meetbaarheid van Z_s, volgt dat Z_s een nulverzameling is.

$\square$

Bijlagen

A. Conventies

Deze bijlage geeft een aantal conventies gebruikt worden in deze scriptie.

- 0 is een natuurlijk getal.
- Een *ruimte* is in deze scriptie altijd een *metrizeerbare topologische ruimte.*
- Gegeven een verzameling A is $\sim A$ het complement van A.
- Zij X en I verzamelingen. Dan is ΔX de diagonaal in het product X^I (dat wil zeggen $\Delta X = \{x \in X^I : x(i) = x(j) \text{ voor alle } i, j \in I\}$).
- Zij X een verzameling en $\Gamma(X)$ een klasse van deelverzamelingen van X, dan is $\check{\Gamma}(X)$ de klasse gegeven door $\check{\Gamma}(X) = \{\sim A : A \in \Gamma(X)\}$. Deze klasse noemen we de **duale klasse** (van $\Gamma(X)$).
- Gegeven verzamelingen X, Y en $A \subseteq X \times Y$ is $\mathrm{proj}_X(A)$ de verzameling $\{x \in X : (\exists y \in Y)((x, y) \in A)\}$.
- Zij $x : \mathbb{N} \to X$ een rij. Dan is $x \upharpoonright n$ het eindig rijtje $\langle x(i) : i < n\rangle$.
- Zij $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ een eindig rijtje elementen van $\{0, 1\}$. Dan is $C_s \subseteq \mathcal{C}$ de basis-open verzameling gegeven door $C_s = \{x \in \mathcal{C} : x \upharpoonright \mathrm{lengte}(s) = s\}$.
- Zij $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ een eindig rijtje natuurlijk getallen. Dan is $N_s \subseteq \mathcal{N}$ de basis-open verzameling gegeven door $N_s = \{x \in \mathcal{N} : x \upharpoonright \mathrm{lengte}(s) = s\}$.

B. Ordinaalgetallen

Een verzameling X heet **transitief** als elk element van X een deelverzameling is van X. Een **ordinaalgetal** is een verzameling welgeordend door de $\in$-relatie. De klasse van ordinaalgetallen noteren we met ORD. Deze klasse is welgeordend door $\in$. We zeggen dat $\alpha < \beta$ als $\alpha \in \beta$, met $\alpha, \beta \in \mathrm{ORD}$. Uit de definitie van ordinaalgetal volgt dat elk ordinaalgetal bepaalt wordt door zijn voorgangers: $\alpha = \{\beta \in \mathrm{ORD} : \beta < \alpha\}$ voor $\alpha \in \mathrm{ORD}$. De **opvolger** van een ordinaalgetal α is $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Een ordinaalgetal α heet een **opvolger ordinaalgetal** als er een $\beta \in \mathrm{ORD}$ bestaat met $\beta + 1 = \alpha$. Een ordinaalgetal α heet een **limiet ordinaalgetal**, of kortweg een **limietgetal** als dit niet het geval is. Een **natuurlijk getal** is een eindig ordinaalgetal. We noteren $\emptyset = 0$, $\{\emptyset\} = 1$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2$, enzovoorts. Elk natuurlijk getal, behalve 0, is een opvolger ordinaalgetal. De verzameling der natuurlijke getallen is een ordinaalgetal en we noteren deze als ω of ω_0. Dit is het eerste limietgetal ongelijk aan 0. Het eerste overaftelbare ordinaalgetal noteren we met ω_1. Er bestaat **transfiniete inductie** langs ORD: als voor elke $\alpha \in \mathrm{ORD}$ geldt dat als een formule $\phi(\beta)$ voor elke $\beta < \alpha$ geldt, dat $\phi(\alpha)$ voor α geldt, dan geldt $\phi(\alpha)$ voor alle $\alpha \in \mathrm{ORD}$.

C. Topologie

Zij X een ruimte en $A \subseteq X$ een deelverzameling. De **afsluiting** van A, genoteerd met $\overline{A}$, is de doorsnede van alle gesloten verzamelingen die A bevatten. Een verzameling $A \subseteq X$ ligt **dicht** in X als $\overline{A} = X$. Als er een aftelbare verzameling bestaat die dicht ligt in X, dan heet X **separabel**. Als er een (volledige) metriek bestaat die de topologie op X induceert, dan heet X **(volledig) metrizeerbaar**. Als X separabel en metrizeerbaar is bestaat er een aftelbare basis voor X. Een punt $x \in X$ heet **geïsoleerd** als $\{x\}$ een open verzameling is. Als X geen geïsoleerde punten bevat, dan heet X **perfect**. Een deelruimte $A \subseteq X$ heet perfect als A gesloten is en een perfecte ruimte is in de relatieve topologie. Als $A \subseteq X$ een aftelbare vereniging van gesloten verzamelingen is, noemen we A een **F_σ-verzameling**. Als A een aftelbare doorsnede van open verzamelingen is, noemen we A een **G_δ-verzameling**. Zij I een verzameling en zij X_i met $i \in I$ topologische ruimten. De **directe som** van de X_i, genoteerd met $\bigoplus_{i \in I} X_i$, is de verzameling $\bigcup_{i \in I} X_i$, waarbij we de X_i vervangen door homeomorfe kopieën zó, dat de vereniging een disjuncte vereniging wordt. Hierop wordt de topologie gelegd waarbij we een verzameling $U \subseteq \bigoplus_{i \in I} X_i$ open noemen precies dan als $U \cap X_i$ open is voor elke $i \in I$.

D. Maattheorie

Eén van de mooie eigenschappen die een verzameling kan hebben, is dat hij meetbaar is. We zullen in 3 de Lebesguemeetbaarheid van de analytische verzamelingen aantonen. Hier geven we een beknopte herhaling van de relevante begrippen en resultaten uit de maattheorie. Voor een uitgebreide behandeling verwijzen we de lezer naar [**Folland**].

Zij X een verzameling. Een **σ-algebra** op X is een niet-lege familie deelverzamelingen van X gesloten onder aftelbare verenigingen en complementen. Merk op dat elke σ-algebra op X de lege verzameling en X bevat en gesloten is onder aftelbare doorsneden. Gegeven een familie $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, bestaat er een kleinste σ-algebra op X die $\mathcal{E}$ bevat. Deze noemen we de **σ-algebra voortgebracht door** $\mathcal{E}$. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. De klasse van **Borel verzamelingen** in X, genoteerd als $\mathbf{B}(X)$ of $\mathbf{B}(X, \mathcal{T})$, is de σ-algebra voortgebracht door de open verzamelingen in X. Een **meetbare ruimte** is een paar $(X, \mathcal{S})$, waarbij $\mathcal{S}$ een σ-algebra op X is.

Zij $(X, \mathcal{S})$ een meetbare ruimte. Een **maat** op $(X, \mathcal{S})$ is een afbeelding $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ met $\mu(\emptyset) = 0$ en $\mu(\bigcup_n A_n) = \Sigma_n \mu(A_n)$ voor elke paarsgewijs disjuncte familie $\{A_n\} \subseteq \mathcal{S}$ (μ is **σ-additief**). Een **maatruimte** is een tripel $(X, \mathcal{S}, \mu)$ waarbij $(X, \mathcal{S})$ een meetbare ruimte is en μ een maat is op $(X, \mathcal{S})$. Een maat is **σ-eindig** als $X = \bigcup_n X_n$ met $X_n \in \mathcal{S}$ en $\mu(X_n) < \infty$. Een verzameling $A \subseteq X$ heet **μ-nul** als er een $B \in \mathcal{S}$ bestaat met $A \subseteq B$ en $\mu(B) = 0$. Een verzameling $A \subseteq X$ heet **μ-meetbaar** als A een element is van de σ-algebra voortgebracht door $\mathcal{S} \cup \mathrm{NULL}_\mu$, waarbij NULL_μ de klasse van μ-nul verzamelingen is. Een maat μ heet **volledig** als zijn domein alle μ-nul verzamelingen bevat. Stel μ is een maat met domein $\mathcal{S}$, dan bestaat er een unieke extensie $\overline{\mu}$ van μ naar een volledige maat met als domein $\mathcal{S} \cup \mathrm{NULL}_\mu$. De maat $\overline{\mu}$ noemen we de **vervollediging** van μ. Zij X een topologische ruimte. Een **Borelmaat** op X is een maat μ op $(X, \mathbf{B}(X))$. Een deelverzameling $A \subseteq X$ heet **universeel meetbaar** als A μ-meetbaar is voor elke σ-eindige Borelmaat μ op X.

We construeren de **Lebesguemaat** m op $\mathbb{R}^n$ als volgt. We definieren de **uitwendige maat** $\mu^*(A)$ van een verzameling $A \subseteq \mathbb{R}^n$ als het infimum over alle sommen $\Sigma_n v(I_n)$ waarbij $\{I_n\}$ een aftelbare collectie open blokken is die A overdekt, dat wil zeggen $A \subseteq \bigcup_n I_n$, en waarbij $v(I)$ het volume van I weergeeft. Merk op dat voor elke $A \subseteq X$ geldt $\mu^*(A) \geq 0$ en mogelijk $\mu^*(A) = \infty$. We noemen een verzameling A m-nul, of een nulverzameling, als $\mu^*(A) = 0$ en we noemen A **Lebesguemeetbaar**, of kortweg meetbaar, als voor elke $X \subseteq \mathbb{R}^n$ geldt

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \setminus A).$$

Voor een meetbare verzameling A schrijven we $m(A)$ voor $\mu^*(A)$ en noemen we $m(A)$ de Lebesguemaat van A. De definities voor m-nul en Lebesguemeetbaar die hier gegeven zijn komen overeen met de definities voor μ-nul en μ-meetbaar uit de vorige alinea. De Lebesguemaat is de vervollediging van een Borelmaat en is σ-eindig.

Het volgende lemma hebben we nodig in 3.6.

3.10. Lemma. *Voor elke verzameling $X \subseteq \mathbb{R}^n$ bestaat er een (Lebesgue-)meetbare verzameling $A \supseteq X$ zó dat als $Z \subseteq A \setminus X$ meetbaar is, dan is Z een nulverzameling.*

Bibliografie

[Engelking] Ryszard Engelking, *General Topology – Revised and completed edition*, Heldermann, Berlijn, 1989

[Folland] Gerald B. Folland, *Real Analysis: modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons, 1999

[Jech] Thomas Jech, *Set Theory – The third millennium edition, revised and expanded*, Springer-Verlag, Berlijn, 2003

[Kechris] Alexander S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, (Graduate texts in mathematics: vol. 156), Springer-Verlag, New York, 1995

[Marker] David Marker, 'Descriptive Set Theory', dictaat van een vak gegeven op de University of Illinois in Chicago, te downloaden op http://www.math.uic.edu/ marker/math512/dst.pdf

[Mauldin] R. Daniel Mauldin, 'The set of continuous nowhere differentiable functions', *Pacific Journal of Mathematics* **83** (1979), no. 1, 199–205

[MauldinCorr] R. Daniel Mauldin, 'Correction: "The set of continuous nowhere differentiable functions", *Pacific J. Math.* **83** (1979), no. 1, 199–205', *Pacific J. Math.* **121** (1986), no. 1, 119–120

[Mazurkiewicz] Stefan Mazurkiewicz, 'Über die Menge der differenzierbaren Funktionen', *Fundamenta Mathematicae* **27** (1936), 244–249

[Miller] Arnold W. Miller, 'On the length of Borel hierarchies', *Annals of Mathematical Logic* **16** (1979), 233–267

Index