Een nieuwe constructie van plurisubharmonische functies en enkele toepassingen

Erdal Emsiz

Doctoraalscriptie

Onder begeleiding van
Jan Wiegerinck

Universiteit van Leiden
Faculteit der Wiskunde
en
Natuurwetenschappen

---

juni 2001

aan mijn moeder
in herinnering aan mijn vader

Inhoudsopgave

0

0.1 Voorwoord

Plurisubharmonische functies zijn van belang in de complexe analyse van meer variabelen om verschillende redenen. Zo zijn $c \log|f|$ en $c|f|^p$ psh functie voor alle $c > 0$, $p > 0$ en holomorfe functie f. Dus de psh functies generaliseren de absolute waarden van holomorfe functies. Ze zijn echter veel minder rigide. Een ander voorbeeld is de connectie met pseudoconvexiteit: een gebied Ω in $\mathbf{C}^n$ is pseudoconvex dan en slechts dan als er een psh functie op Ω bestaat die aan de rand naar ∞ gaat.

Mogelijk is de belangrijkste reden echter van filosofische aard. Op gebieden in $\mathbf{C}$ hebben we een rijk arsenaal aan middelen tot onze beschikking voor het creëren van meromorfe functies met voorgeschreven eigenschappen. Beroemde voorbeelden hiervan zijn de klassieke stellingen van Weierstrass, Mittag-Leffler en Runge. In $\mathbf{C}^n$, $n \geq 2$, hebben we deze stellingen niet tot onze beschikking, of zijn ze veel zwakker. Het belangrijkste middel dat we tot onze beschikking hebben, is de beroemde $\bar{\partial}$-methode. Maar alles bij elkaar genomen is onze kennis van holomorfe functies in $n \geq 2$ veel geringer dan op gebieden in $\mathbf{C}$. We verwijzen de lezer voor dit alles naar de uitstekende boeken van Hörmander[3], Rudin[12] en Krantz[6].

Een ander essentieel punt is, dat voor $n \geq 2$ de principiële objecten van studie geen holomorfe functies zijn, maar gebieden. In $\mathbf{C}$ is dit veel minder het geval. Men denke bijvoorbeeld aan de afbeeldingsstelling van Riemann. Gegeven een gebied van holomorfie Ω in $\mathbf{C}^n$, kan het zeer moeilijk zijn om een holomorfe functie te construeren waarvan het maximale domein van bestaan het gegeven gebied is. Dit is zo omdat de rand van zo een gebied zeer ingewikkeld kan zijn. Zo hoeven randpunten niet bereikbaar te zijn via paden. We hebben echter altijd (voor een strikte) gebied Ω in $\mathbf{C}^n$ de afstandsfunctie d_Ω tot onze beschikking: de afstand tussen z en de rand van Ω. Als Ω tevens een gebied van holomorfie is, dan is $-\log d_\Omega(z)$ psh. Men zou kunnen tegenwerpen dat er een sterke band is tussen holomorfe en psh functies. In $\mathbf{C}$ zijn bijvoorbeeld de Hartogfuncties precies gelijk aan de subharmonische functies (zie Krantz, loc. cit, paragraaf 2.1). Maar hoewel in $n \geq 2$ een innige band bestaat tussen psh functies en holomorfe functies, in het globale geval is deze band veel subtieler. Men denke bijvoorbeeld aan het feit dat de enige globale holomorfe functies op compacte complexe variëteiten de constante functies zijn. Er bestaan zelfs niet-compacte pseudoconvexe variëteiten met deze eigenschap!

E. Poletsky heeft in zijn artikelen [9] en [10] een nieuwe methode geintroduceerd voor het construeren van psh functies. Oorspronkelijk was mijn doel het bestuderen van *polynomiale convexiteit* en approximatie door holomorfe polynomen. Een belangrijke toepassing in het artikel van Poletsky[10] was Stelling 7.2 en Gevolg 7.1 (Hier: Stelling 8.5 en Gevolg 8.6). Dit is een karakterisatie van het zogenaamde polynomiaal convexe omhulsel van een reguliere compacte verzameling door middel van analytische schijven.

Na enige tijd bleek dat een aantal van de bewijzen in Poletsky[10], voornamelijk die in hoofdstuk 5, zeer moeilijk te volgen zijn. Later werden er bewijzen gepubliceerd voor enige drie bekende schijffunctionalen door Lárusson en Sigurdsson in [7]. Voor deze scriptie heb ik mij hoofdzakelijk op hun artikel geconcentreerd. In [7] zijn tevens de resultaten van Poletsky[10] gegeneraliseerd van gebieden in $\mathbf{C}^n$ naar een ruime klasse van complexe variëteiten voor de genoemde drie schijffunctionalen.

Hoofdstuk 1 en 2 behandelen polynomiale convexiteit en polynomiale benadering. In hoofdstuk 3 worden enkele basisbegrippen en resultaten uit de potentiaaltheorie behandelt die in de latere hoofdstukken zullen worden gebruikt. In hoofdstuk 4 worden de drie basisfunctionalen geintroduceerd: Poisson-, Riesz- en Lelongfunctionaal. Verder zijn er een aantal basisideeën en basisbegrippen uit het artikel van Poletsky geïsoleerd. Deze dienen om de formulering van de Dualiteitsstelling in haar meest abstracte vorm te kunnen begrijpen In hoofdstuk 5 en 6 worden de bewijzen gegeven voor de eerste twee basisfunctionalen. Hierbij hebben we ons beperkt tot het geval van gebieden in $\mathbf{C}^n$, waardoor een aantal vereenvoudigingen konden worden doorgevoerd. Voor de Lelongfunctionaal wordt in hoofdstuk 7 alleen een globaal overzicht van het bewijs gegeven, omdat er geen substantiële versimpeling mogelijk bleek voor het speciale geval van een gebied in $\mathbf{C}^n$. Een aantal toepassingen van de Poissonfunctionaal worden behandeld in hoofdtuk 8, het laatste hoofdstuk. De belangrijkste hiervan is de eerder genoemde Stelling 8.5 en Gevolg 8.6. Een ander resultaat is Gevolg 8.11, die een obstructie in termen van analytische schijven geeft voor het niet-pseudoconvex zijn van een complexe variëteit.

Leiden, 18 juni 2001 Erdal Emsiz

0.2 Index van notaties

- Zij B een topologische ruimte. $A \Subset B$ betekent: $A \subset B$ en $\bar{A}$ is compact.

- usc betekent “boven semi continu”. Het is de afkorting voor het Engelse “upper semi continue”.

- X stelt ***altijd*** een compacte hausdorffse ruimte voor, Ω een gebied in $\mathbf{C}^n$ (en heel soms in $\mathbf{R}^n$).

- $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbf{C} : |z| < r\}, \mathbb{D} = \mathbb{D}_1, \mathbb{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}, \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $V^* = V \setminus \{0\}$ als $V \subset \mathbf{R}^n$; $\mathrm{m} = \mathrm{m}_k$ is de k-dimensionale Lebesguemaat op $\mathbf{R}^k$, λ_k de Lebesguemaat op de k-torus $\mathbb{T}^k$ en $\lambda = \lambda_1$.

- $S_r(x^0) = S_r^n(x^0) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x^0| = r\}$ is de n-dimensionale sfeer in $\mathbf{R}^n$ met middelpunt x^0 en straal r. $B_r(x^0) = B_r^n(x^0) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x^0| < r\}$ is de n-dimensionale open bol in $\mathbf{R}^n$ met middelpunt x^0 en straal r. $D_r(z^0) = D_r^n(z^0) = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_i - z_i^0| < r \text{ voor } 1 \leq i \leq n\}$ de n-dimensionale polyschijf in $\mathbf{C}^n$ met middelpunt x^0 en straal r.

- $C(X)$ is de ruimte van complexwaardige functies op X, $C_R(X)$ is de ruimte van reëelwaardige functies op X. Zij nu $X \subset \mathbf{C}^n$. $P(X)$ is de afsluiting in $C(X)$ van de lineaire deelruimte opgespannen door de polynomen in $z_1, z_2, \cdots, z_n$.

- Stel A is een Banachalgebra en $x, x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$. $Max(A)$ is de ruimte van maximale idealen van A, $\sigma(x)$ is spectrum van x, $\sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ het gezamenlijke spectrum en $\hat{x}$ de Ge'lfandgetransformeerde van x.

- Stel dat $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ een gebied is, M en N complexe variëteiten (bij ons altijd gebieden in $\mathbf{C}^n$). $\mathrm{PSH}(\Omega)$ is de ruimte van alle plurisubharmonische functies op Ω, $\mathrm{PSH}^*(\Omega) = \mathrm{PSH}(\Omega) \setminus \{-\infty\}$, $\mathcal{L}(w)$ de Leviform van een $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cup \{-\infty\}$ met de afspraak $\mathcal{L}(-\infty) = 0$; $\mathcal{O}(M, N)$ is de ruimte van holomorfe afbeeldingen van M naar N, $\mathcal{O}(M) = \mathcal{O}(M, \mathbf{C})$ is de ruimte van holomorfe functies op M. $\mathcal{A}_\Omega$ is de ruimte van analytische schijven in Ω, i.e. alle $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \Omega)$ die voortgezet kunnen worden naar een omgeving van $\bar{\mathbb{D}}$ en $\mathcal{A}_\Omega(x) = \{f \in \mathcal{A}_\Omega : f(0) = x\}$.

- Zij M een reëelanalytische variëteit. We schrijven $C^\omega(\Omega)$ voor de ruimte van complexwaardige reëelanalytische functies.

- We schrijven $M_r(u)(x)$ voor de gemiddelde waarde van een subharmonische functie u op $S_r(x)$:

$$M_r(u)(x) = \frac{1}{\sigma_{n-1} r^{n-1}} \int_{S(x^0,r)} u(x) d\sigma,$$

met σ_n de oppervlakte van de eenheidssfeer $S(0,1)$ in $\mathbf{R}^n$.

1 Uniforme benadering door polynomen

1.1 Het één variabele geval

Definitie 1.1. We definiëren $C(X)$ als de ruimte van alle complexwaardige functies op X, $C_{\mathbf{R}}(X)$ als de ruimte van alle reëelwaardige functies op X; beide voorzien we van de supremum norm. Een verzameling functies A op X *scheidt* de punten van X als voor alle $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ er een $f \in A$ bestaat met $f(x_1) \neq f(x_2)$. Wanneer $X \subset \mathbf{C}^n$, dan definiëren we $P(X)$ als de afsluiting in $C(X)$ van de holomorfe polynomen in de onafhankelijke variabelen $z_1, z_2, \cdots, z_n$. Met ***polynoom*** bedoelen we altijd een holomorfe polynoom.

De klassieke Weierstrassstelling vertelt ons dat polynomen over $\mathbf{R}$ op het (compacte) interval $[a, b]$ dicht liggen in de ruimte van de continue functies (in de topologie van uniforme convergentie).

Stelling 1.1 (Stone-Weierstrass, complexe versie (SWCV)). *Zij X een compacte Hausdorffse ruimte, $A \subset \mathbf{C}(X)$ een algebra van continue functies die de constanten bevat, de punten van X scheidt en gesloten is onder conjugatie: $f \in A \Longrightarrow \bar{f} \in A$. Dan ligt A dicht in $C(X)$.*

Voorbeeld 1.2. $X = [a, b] \subset \mathbf{C}$. SWCV impliceert $P(X) = C(X)$, omdat $z \mapsto \bar{z}$ in $P(X)$ ligt en $z \mapsto z$ een voortbrenger is van $P(X)$.

Voorbeeld 1.3. Zij X een compacte deelverzameling in de *reële ruimte* Σ van $\mathbf{C}^n$: $\Sigma = \{(z_1, z_2, \cdots, z_) \in \mathbf{C}^n : z_j \in \mathbf{R} \ (j = 1, 2, \cdots, n))\}$. Uit SWCV volgt wederom dat $P(X) = C(X)$, met hetzelfde argument als in voorbeeld 1.2: $p_i(z) = \bar{z}_i \in P(X)$ voor $1 \leq i \leq n$.

Wanneer geldt $P(X) = C(X)$?. Voor het geval $n = 1$ hebben we de volgende noodzakelijke voorwaarde op X:

Lemma 1.2. *Zij $X \subset \mathbf{C}$ en $P(X) = C(X)$. Dan heeft X een leeg inwendige en $\mathbf{C} \setminus X$ is samenhangend.*

Bewijs. Als $f \in P(X)$, dan zijn er polynomen P_n die uniform convergeren naar f op X en dus ook op het inwendige $\mathring{X}$; f is daarom holomorf op $\mathring{X}$. Het inwendige van X is leeg omdat er continue functies zijn die wel continu zijn op X, maar niet holomorf op $\mathring{X}$ wanneer $\mathring{X}$ niet leeg is: neem een willekeurige niet-constante reëelwaardige continue functie. Stel nu dat $\mathbf{C} \setminus X$ niet-samenhangend is. Dan heeft ze een begrensde component U. Bewering: $P(X) \neq C(X)$. Neem een $\alpha \in U$ en definieer $f(z) = (z - \alpha)^{-1}$ en zet $M = \max_{z \in X} |z - \alpha|$. Onmiddellijk: $f \in C(X)$. Claim: $f \notin P(X)$. Anders bestaat er een polynoom P met $|P(z) - f(z)| < 1/M$ voor alle $z \in X$. Vermenigvuldigen met $|z - \alpha|$ geeft

$$|(z - \alpha)P(z) - 1| < 1 \quad \text{voor alle } z \in X.$$

In het bijzonder geldt dit voor de rand van U omdat $\partial U \subset X$. U is tevens begrensd; daarom is $\bar{U}$ compact en uit de maximum modulus principe [1] volgt dat dan de ongelijkheid op heel U geldt. Invullen van $z = \alpha$ geeft $1 < 1$. Een tegenspraak. Dus f zit niet in $P(X)$ en daarom: $P(X) \neq C(X)$. □

[1] Als Ω een begrensd gebied is in $\mathbf{C}$ en $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ dan geldt: $\max_{\bar{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$.

Stelling 1.3 (Lavrentief). *Zij X een compacte deelverzameling van het vlak, $\overset{\circ}{X} = \emptyset$ en $\mathbf{C} \setminus X$ is samenhangend. Dan geldt $P(X) = C(X)$.*

Uit het bewijs van Lemma 1.2 volgt dat een noodzakelijke voorwaarde voor $f \in P(X)$ is, dat f holomorf is in het inwendige van X. Dit is ook voldoende, mits $\mathbf{C} \setminus X$ samenhangend is:

Stelling 1.4 (Mergelyan). *Zij $X \subset \mathbf{C}$ compact en $\mathbf{C} \setminus X$ samenhangend. Dan bestaat $P(X)$ uit alle f in $C(X)$, die holomorf zijn in het inwendige van X.*

In principe lost deze stelling de vraag over uniforme approximatie door polynomen op compacta van het vlak volledig op. Merk op dat Mergelyan's stelling de stelling van Lavrentief en Weierstrass' klassieke stelling bevat. Voor een bewijs van de stelling van Mergelyan verwijzen we de lezer naar Rudin[12, Hoofdstuk 20]. Wermer[16] is een goede referentie voor de rest van hoofdstuk 1 en hoofdstuk 2.

1.2 Het meer-variabelen geval

Roep in herinnering de stelling van Runge over approximatie door rationale functies (Zie bijvoorbeeld Rudin[12, Stelling 13.6]).

Stelling 1.5 (Runge). *Zij X een compacte verzameling in $\mathbf{C}$ en $\{\alpha_j\}$ een verzameling die een punt van elke component van $S^2 - X$ bevat. Als Ω open is, $X \subset \Omega$, $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ en $\epsilon > 0$, dan is er een rationale functie R, waarvan de polen in de voorgeschreven verzameling $\{\alpha_j\}$ zitten en zodanig dat*

$$|f(z) - R(z)| < \epsilon \quad \textit{voor alle } z \in K$$

geldt.

Opmerking 1.4. In de terminologie van complexe analyse zijn polynomen rationale functies met een pool in oneindig. Dit is zinnig, want dan zijn polynomen meromorfe functies op de Riemann oppervlak S^2 (Zie Forster[2]).

Gevolg 1.6. *Zij $X \subset \mathbf{C}$ compact met samenhangende complement. Zij f holomorf in een omgeving Ω van X, dan geldt $f_{|X} \in P(X)$.*

Bewijs. $\mathbf{C} \setminus X$ samenhangend impliceert dat $S^2 - X$ maar één component heeft: de onbegrensde. Pas nu de stelling van Runge toe met $\{\alpha_j\} = \{\infty\}$. $\square$

Opmerking 1.5. Merk op dat deze stelling een zwakke versie van Mergelyan's stelling is: Mergelyan eist alleen maar holomorfie in het *inwendige* en niet in een omgeving van X. In die vorm valt Mergelyan's stelling echter niet makkelijk te generaliseren.

We willen Gevolg 1.6 generaliseren naar $\mathbf{C}^n$ met $n \geq 2$. We vragen ons af wat voor functies $P(X)$ precies bevat. Als X en Y twee homeomorfe compacte deelverzamelingen zijn, dan is $C \setminus X$ samenhangend desda $\mathbf{C} \setminus Y$ is samenhangend is[2]. De eigenschap "$\mathbf{C} \setminus X$ is samenhangend" is dus een topologische eigenschap. Op $\mathbf{C}$ is het dus voldoende om *alleen* maar een topologische voorwaarde op X te leggen voor de conclusie van Stelling 1.6. Voor $n \geq 2$ blijkt een topologische conditie alleen niet voldoende is om de conclusie van Stelling 1.6 te garanderen:

[2]Opgave voor de lezer.

Lemma 1.7. *Zij*

$$X_1 = \{(z,0) : z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\} \text{ en}$$
$$X_2 = \{(z,\bar{z}) : z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}.$$

Dan zijn X_1 en X_2 homeomorf met S^1, $P(X_1) \neq C(X_1)$ en $P(X_2) = C(X_2)$.

Bewijs. Dat X_1 en X_2 beiden homeomorf zijn met S^1 is onmiddellijk. Neem nu $F(z) = 1/z_1$, die holomorf is in een omgeving van X_1. Neem aan dat er een polynoom $P(z)$ bestaat met $\sup_X |P - F| < 1$. Omdat $(z_1, z_2) \in X_1 \Rightarrow z_2 = 0$, mogen we aannemen dat P een polynoom is in één variabele: z. Door op te merken dat we in de situatie van Lemma 1.2 zijn, volgt wederom een tegenspraak. Daarom: $F \notin P(X_1)$.

$P(X_2) = C(X_2)$ volgt uit de Stone-Weierstrass stelling omdat $P(X_2)$ de constanten bevat en de punten van X_2 scheidt (omdat het de coördinatenfuncties z_1 en z_2 bevat). Wat nog nagegaan dient te worden, is dat $q_j(z) = \bar{z}_j$ voor $j = 1$ en 2 een element is van $P(X_2)$. Hieruit volgt het gesloten zijn van $P(X_2)$ onder conjugatie. Beschouw de polynomen $p_1(z) = z_2$ en $p_2(z) = z_1$. Dan geldt op X_2: $p_1(z) = z_2 = \bar{z}_1 = q_2(z)$ en $p_2(z) = z_1 = \bar{z}_2 = q_1(z)$. Oftewel: $q_1,\ q_2 \in P(X_2)$. □

Uit dit voorbeeld volgt dat *alleen* een topologische conditie op X niet voldoende is om de conclusie van Gevolg 1.6 voor $\mathbf{C}^n$ met $n \geq 2$ te garanderen. We hebben een conditie nodig die niet in topologische termen is geformuleerd, maar in termen van polynomen. Immers, ons doel is benadering door polynomen. Voor $n = 1$ moet deze conditie samenvallen met de topologische conditie op X: "$\mathbf{C} \setminus X$ is samenhangend". Het volgende lemma is de route naar de uiteindelijke definitie.

Lemma 1.8. *Zij $X \subset \mathbf{C}$ compact. $\mathbf{C} \setminus X$ is samenhangend desda er voor elke $z_0 \in \mathbf{C} \setminus X$ een polynoom P bestaat met*

$$|P(z^0)| > \max_X |P| \tag{1.1}$$

Bewijs. Als $\mathbf{C} \setminus X$ niet-samenhangend is, kies dan een z^0 in een begrensde component U van $\mathbf{C} \setminus X$. Dan volgt uit de maximum modulus principe dat

$$P(z) \leq \max_X |P| \quad \text{voor alle } z \in U,$$

en (1.1) is niet mogelijk. Stel nu dat $\mathbf{C} \setminus X$ samenhangend is. Neem een $z^0 \in \mathbf{C} \setminus X$. Omdat het aantal componenten van een open deelverzameling van $\mathbf{R}^n$ met $n \geq 2$ niet verandert wanneer er een punt uit wordt verwijderd, heeft $X \cup \{z^0\}$ een samenhangend complement. Kies nu $z_n \to z^0$ en $z_n \neq z^0$. Dan is $f_n(z) = 1/(z - z_n)$ holomorf in een omgeving van $X \cup \{z^0\}$. Uit Stelling 1.6 volgt dan dat er polynomen P_n zijn met

$$|P_n(z) - \frac{1}{z - z_n}| \leq \frac{1}{n} \quad \text{voor alle } z \in X \cup \{z^0\}$$

Door n groot genoeg te nemen, kunnen we ervoor zorgen dat (1.1) geldt. □

Definitie 1.6. Zij $X \subset \mathbf{C}^n$ compact. Dan definiëren we het *polynomiaal convexe omhulsel* van X als

$$\widehat{X} = \{z \in \mathbf{C}^n : |P(z)| \leq \max_X |P| \quad \text{voor alle polynomen } P\}$$

We noemen X *polynomiaal convex* als $X = \widehat{X}$.

We kunnen nu Lemma 1.8 herformuleren in termen van polynomiaal convexiteit en er geldt zelfs meer:

Stelling 1.9. *Zij $X \subset \mathbf{C}$ compact. Dan is $\widehat{X}$ gelijk aan het complement van $\{$onbegrensde componenten van $\mathbf{C} \setminus X\}$ in $\mathbf{C}$. Dus $\mathbf{C} \setminus X$ is samenhangend desda X polynomiaal convex is.*

We zullen in het volgende hoofdstuk (Stelling 2.3) bewijzen dat X polynomiaal convex is wanneer $P(X) = C(X)$. Als we dit voor het moment aannemen, dan volgt uit Lemma 1.7 dat X_2 polynomiaal convex is. X_1 is echter niet polynomiaal convex: het bevat bijvoorbeeld alle $(z, 0)$ met $|z| \leq 1$, hetgeen onmiddellijk uit de maximum modules principe volgt. Dus polynomiaal convexiteit is niet behouden onder homeomorfismen voor $n \geq 2$, oftewel, het is niet een topologische eigenschap. Dit in tegenstelling tot het geval $n = 1$.

Voor polynomiaal convexe X hebben we de volgende belangrijke generalisatie van Gevolg 1.6:

Stelling 1.10 (Oka-Weil). *Zij $X \subset \mathbf{C}^n$ compact en polynomiaal convex. Als $F \in C(X)$ en F is holomorf in een omgeving van X, dan $F \in P(X)$.*

De moeilijkheid in het toepassen van de stelling van Oka-Weil is om te bepalen wanneer X polynomiaal convex is. Voor $n \geq 2$ is er geen makkelijke manier om te bepalen of een gegeven compacte verzameling $X \subset \mathbf{C}^n$ polynomiaal convex is.// De gesloten n-dimensionale bol $\bar{B}^n(z^0, r)$ en de gesloten polyschijf $\bar{D}^n(z^0, r)$ zijn polynomiaal convex. Andere belangrijke voorbeelden van compacte polynomiaal convexe verzamelingen zijn de zogenaamde *polynomiale polyhedra*:

$$\Pi = \{z \in \mathbf{C}^n ||z_i| \leq M, |P_1(z)| \leq M, \ldots, |P_m(z)| \leq M\}$$

voor een $M > 0$, $m \geq 0$ en polynomen $P_1, P_2, \cdots, P_m$.

Verder zijn ook alle compacte convexe verzamelingen X polynomiaal convex, omdat (zie Hörmander[4, Stelling 2.1.5])

$$X = \{z \in \mathbf{C}^n : l(z) \leq \max_X l \text{ voor alle reëelwaardige } \mathbf{R}\text{-lineaire functies } l\}.$$

Voor nader onderzoek naar de eigenschappen van $\widehat{X}$ hebben is meer theorie nodig. In het volgende hoofdstuk wordt de theorie van Banachalgebras gebruikt om op natuurlijke manier polynomiaal convexe verzamelingen te produceren. In de laatste hoofdstukken wordt de theorie van *holomorfe stromen* van Poletsky gebruikt om polynomiale convexiteit dieper te bestuderen.

2 Banachalgebra methoden

2.1 Banachalgebras in sneltreinvaart

Een *Banachalgebra* is een Banachruimte over $\mathbf{C}$ met een ringstructuur die aan scalaire vermenigvuldigen gerelateerd is door $\alpha(xy) = (\alpha x)y$ voor x en y in A, $\alpha \in \mathbf{C}$ en waarvoor op A geldt: $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$. In deze scriptie zijn alle Banachalgebras commutatief en hebben een eenheidselement 1: $x \cdot 1 = 1 \cdot x$ ($x \in A$) en $\|1\| = 1$. Het *spectrum* $\sigma(x)$ van een element $x \in A$, is de verzameling van alle complexe getallen λ waarvoor geldt dat $x - \lambda$ geen inverse heeft. Voor elke $x \in A$, is $\sigma(x)$ een niet-lege compacte verzameling in $\mathbf{C}$. Tevens geldt $|\lambda| \leq \|x\|$ voor alle $\lambda \in \sigma(x)$.

Stelling 2.1 (Ge'lfand-Mazur). *Een commutatieve Banachalgebra met een identiteit die ook een lichaam is, isometrisch isomorf met* $\mathbf{C}$ *(als een Banachalgebra).*

Er is een natuurlijke identificatie van de ruimte van maximale idealen $\mathrm{Max}(A)$ van A met de ruimte van $\mathbf{C}$-waardige homomorfismen, met topologie de geïnduceerde zwak-* topologie van A^*. Een Banachalgebra homomorfisme is een homomorfisme van de onderliggende ringstructuur. Een belangrijk resultaat is dat zulke homomorfismen *altijd* begrensd zijn, met norm hoogstens gelijk aan 1. In de zwak-* topologie is $\mathrm{Max}(A)$ compact en Hausdorff. De *Ge'lfandgetransformeerde* van $x \in A$, is de $\mathbf{C}$-waardige functie $\hat{x}$ op $\mathrm{Max}(A)$ gedefinieerd door $\phi \mapsto \phi(x)$.

Stelling 2.2. *De Ge'lfandgetransformeerde is een homomorfisme van* A *naar een algebra* $\bar{A}$ *van continue functies op* $\mathrm{Max}(A)$. *De algebra* $\bar{A}$ *scheidt de punten van* $\mathrm{Max}(A)$ *en bevat de constanten. De Ge'lfand-getranfsformeerde is normverlagend:*

$$\|\hat{x}\|_{\mathrm{Max}(A)} \leq \|x\| \quad \textit{voor } x \in A.$$

Ook geldt voor $x \in A$: $\sigma(x) = \hat{x}(\mathrm{Max}(A))$ en $\|\hat{x}\|_{\mathrm{Max}(A)} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$. Hierdoor geïnsprireerd, definiëren we het *gezamenlijke spectrum* van $x_1, x_2, \cdots, x_n$ als

$$\sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \{\widehat{x_1}(\phi), \cdots, \widehat{x_n}(\phi) : \phi \in \mathrm{Max}(A)\}$$

Voor het geval $n = 1$ komt dit neer op het eerder gedefinieerde spectrum. We schrijven $\widehat{\sigma}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ voor het polynomiaal convexe omhulsel van $\sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

2.2 Toegepast op $P(X)$

We gaan bovenstaande theorie toepassen op de Banachalgebra $A = P(X)$ met $X \subset \mathbf{C}^n$ compact. $P(X)$ is dan een eindig voortgebracht algebra, met voortbrengers $z_1, z_2, \cdots, z_n$. Voor een Banachalgebra van functies A op X schrijven we e_w voor de *puntevaluatie* in een punt w: $e_w(p) = p(w)$ voor all $p \in A$.

De volgende stelling geeft het verband tussen $P(X)$ en $\widehat{X}$.

Stelling 2.3. *Zij* $X \subset \mathbf{C}^n$ *compact. Dan is er een natuurlijke identificatie tussen* $\mathrm{Max}(P(X))$ *en* $\widehat{X}$. *Ook geldt:* $\widehat{X} = \sigma(z_1, z_2, \cdots, z_n)$. *Voor polynomiaal convexe* X *geldt* $\mathrm{Max}(P(X)) = X$. *In het bijzonder geldt dat:* X *is polynomiaal convex als* $P(X) = C(X)$.

Bewijs. Elk $\mathbf{C}$-waardige homomorfisme ϕ van de algebra van polynomen in $z_1, z_2, \cdots, z_n$ is een puntevaluatiehomomorfisme e_{z^0}: $z^0 = (\phi(z_1), \cdots, \phi(z_n)) \in \mathbf{C}^n$. Dus elke homomorfisme van $P(X)$ is evaluatie in een punt van $\mathbf{C}^n$: $\phi \in \mathrm{Max}(P(X)) \Longrightarrow$ er is een $z^0 \in \mathbf{C}^n$ zodanig dat $\phi = e_{z^0}$. Daar $\|\phi\| \leq 1$, geldt $|\phi(p)| \leq \|p\|_X$. Oftewel $|p(z^0)| \leq \|p\|_X$ voor alle $p \in P(X)$: $z^0 \in \widehat{X}$.

Stel nu dat $z^0 \in \widehat{X}$. Dan volgt uit $|p(z^0)| \leq \|p\|_X$ voor alle polynomen p. Uit de continuïteit van tevens: $|f(z^0)| \leq \|f\|_X$ voor alle $f \in P(X)$. Daarom: $e_{z^0} \in \mathrm{Max}(P(X))$. Injectiviteit en surjectiviteit zijn duidelijk. Het laatste deel van de stelling volgt uit $\mathrm{Max}(C(X)) = X$. $\square$

Stelling 2.4. *Zij A een eindig voortgebracht Banachalgebra met voortbrengers $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Dan is het gezamenlijke spectrum $\widehat{\sigma}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ van $x_1, x_2, \cdots, x_n$ polynomiaal convex en de natuurlijke projectie π van $\mathrm{Max}(A)$ op $\widehat{\sigma}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ is een homeomorfisme.*

Bewijs. Omdat A eindig wordt voortgebracht, wordt elk $\phi \in \mathrm{Max}(A)$ volledig bepaald door zijn waarden op de voortbrengers; π is daarom injectief. Continuïteit is onmiddellijk, want π is continu per coördinaat. Roep in herinnering uit elementaire topologie dat een continu bijectieve afbeelding van een compacte ruimte naar een Hausdorffse ruimte een homeomorfisme is: π is een homeomorfisme.

Neem een $z^0 \in \widehat{\sigma}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Dan geldt voor alle $p \in P(X)$:

$$\begin{aligned} |p(z^0)| \leq \sup_{z \in \widehat{\sigma}} |p| &= \sup_{\phi \in \mathrm{Max}(A)} |p(\hat{x}_1(\phi), \cdots, \hat{x}_n(\phi))| \\ &= |p(x_1, \widehat{x_2, \cdots}, x_n(\phi)| \\ &\leq \|p(x_1, x_2, \cdots, x_n)\|, \end{aligned} \tag{2.1}$$

de laatste ongelijkheid volgt omdat de Ge'lfandgetransformeerde normverlagend is.

Beschouw $A' = \{P(x_1, x_2, \cdots, x_n) : P \text{ een polynoom}\}$. Definieer $\chi : A' \longrightarrow \mathbf{C}$, $\chi(P(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = P(z^0)$. Omdat $x_1, x_2, \cdots, x_n$ voortbrengers zijn, is de afbeelding goed gedefinieerd, ligt A' dicht in A. Omdat χ continu is, kan ze worden voortgezet tot heel A. Omdat $x_1, x_2, \cdots, x_n$ voortbrengers zijn geldt $z^0 = (\hat{x}_1(\phi), \cdots, \hat{x}_n(\phi))$ en daarom $z^0 \in \sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, waaruit volgt dat $\widehat{\sigma}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. $\square$

3 Potentiaaltheorie

In dit hoofdstuk vatten we enkele belangrijke begrippen en resultaten uit de potentiaaltheorie samen. De bronnen die we hebben gebruikt zijn Kiselman[5], Krantz[6] en Ransford[11].

3.1 Elementaire theorie van (pluri)subharmonische functies

Definitie 3.1. Een functie $u : \Omega \longrightarrow \bar{R}$ op een gebied $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ heet *subharmonisch* op Ω als

(a) u boven semi-continu (usc) is in Ω, i.e.

$$\limsup_{x \to x^0} u(x) \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \sup_{|x-x^0|<\epsilon} u(x) \leq u(x^0)$$

voor elke $x^0 \in \Omega$ en

(b) de submiddelwaarde eigenschap (smvp) geldt: voor elke $x^0 \in \Omega$ en voor een voldoende kleine $r > 0$, is $u(x^0)$ niet groter dan de gemiddelde waarde $\mathcal{M}_r(u)(x^0)$ van u op de sfeer $S(x^0, r)$:

$$u(x^0) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^0,r)} u(x) d\sigma. \tag{3.1}$$

De volgende eigenschappen van subharmonische functies volgen uit definitie 3.1:

1. Een lineaire combinatie $a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m$ van subharmonische functies u_j met niet-negatieve coëfficiënten a_i is subharmonisch.

2. Het maximum van een eindig aantal subharmonische functies, $u(x) = \sup\{u_1(x), \cdots, u_m(x)\}$, is subharmonisch.

3. De limiet van een uniforme convergente of monotoon dalende rij van subharmonische functies is subharmonisch.

4. Zij u_α, $\alpha \in \Lambda$ een collectie subharmonische functies. Wanneer $|\Lambda| < \infty$ dan is de bovenomhulsel $u = \sup_\Lambda u_\alpha$ subharmonisch. Neem nu aan dat $\{u_\alpha\}$ lokaal uniform van boven begrensd is (oftewel u lokaal begrensd) en Λ oneindig. Dan hoeft niet meer te gelden dat u subharmonisch is, omdat u niet usc hoeft te zijn.
   Voor een willekeurige, lokaal van boven begrensde functie v, is de *regularisatie*, i.e. de kleinste usc majorant v^* gedefinieerd en is gelijk aan:

   $$v^*(z) = \limsup_{w \to z} v(w).$$

   Als de functie v in het punt z^0 voldoet aan de smvp, dan voldoet v^* ook aan smvp in z^0. Aangezien $\sup_\Delta u_\alpha$ in elk punt voldoet aan de smvp, is u subharmonisch.

Uit (a) volgt dat $\{x \in \Omega : u(x) < t\}$ open voor alle $t \in \mathbf{R}$. Hieruit volgt dan dat op elke compacte $X \subset \Omega$, de functie u zijn maximum aanneemt. Daaruit volgt weer het belangrijke maximum principe.

Stelling 3.1 (maximum principe). *Zij u een subharmonische functie op een gebied $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ die een globaal maximum aanneemt in een $x^0 \in \Omega$: $u(x^0) = \sup_\Omega u$. Dan is u constant op Ω.*

Voor een harmonische functie v geldt in (b) gelijkheid en zijn dus v en $-v$ beide subharmonisch; het omgekeerde is ook waar. Hieruit en uit het maximumprincipe volgt dat, wanneer v harmonisch is, u subharmonisch en $u_{|\partial D} \leq v_{|\partial D}$, dan ook: $u(x) \leq v(x)$ op D.

Als u harmonisch is in de bol $B(x^0, r)$ en continu in $\bar{B}$, dan geeft de *Poisson formule*

$$u(x) = \int_{S(x^0,r)} u(y)\mathcal{P}(x,y)d\sigma(y), \tag{3.2}$$

waarin $\mathcal{P}(x,y)$ de Poissonkernel voor de bol $B(x^0, r)$ is. Voor de eenheidsbol met de oorsprong als middelpunt geldt:

$$\mathcal{P}(x,y) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n},$$

waarbij formule (3.2) het klassieke Dirichletprobleem oplost: als ϕ continu is op ∂B, dan is

$$u(x) = \int_{S(x^0,r)} \phi(y)\mathcal{P}(x,y)d\sigma(y)$$

harmonisch in B, continu op $\bar{B}$ en gelijk aan ϕ op ∂B.

Definitie-Lemma 3.2. *Een verzameling $E \subset \Omega$ heet* polair *wanneer er een subharmonische functie $u \not\equiv -\infty$ op Ω bestaat die $-\infty$ is op E. Subharmonische functies zijn lokaal integreerbaar, dus polaire verzamelingen hebben Lebesguemaat nul. Door convolutie van een subharmonische functie u met een approximatie-eenheid $K_\delta(x) \geq 0$ ($\delta > 0$) die C^∞ is, met drager in $B(0, \delta)$ en $\int K_\delta(x)dV = 1$ en $u_\delta = u * K_\delta$ krijgen we C^∞ subharmonische functies u_δ die monotoon naar u convergeren als $\delta \to 0$.*

Als $u \in C^2(\Omega)$ is, dan is subharmoniciteit equivalent met een positieve *Laplaciaan* Δu. Dit volgt uit de machtreeks van u en eigenschap (b):

$$\frac{1}{\delta_n r^{n-1}} \int_{S(x^0,r)} u(x)d\sigma = u(x^0) + C \cdot r^2(\Delta u|_{x=x_0} + o(1)),$$

met C een van r onafhankelijke constante.

Wanneer $u \not\equiv -\infty$ een willekeurige subharmonische functie in een gebied Ω is, dan is u lokaal integreerbaar in Ω en is daarom een distributie. Door u te benaderen door oneindig maal differentieerbare subharmonische functies, volgt dat Δu positief is in de zin van distributies. Omdat elke positieve distributie een positieve maat is, kunnen we Δu beschouwen als een positieve maat op Ω. Deze wordt de *geassocieerde maat* met u genoemd.

Wanneer μ een eindige Borelmaat op $\mathbf{R}^n$ is, dan is haar *potentiaal* $U^\mu = K * \mu = \int K(x-y)d\mu(y)$ een subharmonische functie. Hier is $K(x) = \frac{1}{2\pi}\log(x)$ als $n = 2$ en $K(x) = -\frac{\Gamma(n/2-1)}{4\pi^{n/2}} \cdot 1/|x|^{n-2}$ als $n > 2$. Door een expliciete berekening of door op te merken dat K niks anders is dan de fundamentele oplossing van de Laplace operator, volgt dat $\Delta U^\mu = \mu$. Door nu op te merken dat de Laplaciaan van $u - U^{\Delta u}$ nul is op elk compacte gebied van Ω, krijgen we:

Stelling 3.3 (Decompositiestelling van Riesz). *Zij u een subharmonische functie in een gebied $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Op elke relatieve compact gebied $D \Subset \Omega$ heeft u de vorm*

$$u = U^\mu + h,$$

met U^μ de potentiaal van de maat $\mu = \Delta u$ en h een harmonische functie.

De theorie van subharmonisch functies is voornamelijk een theorie van $\mathbf{R}^n$. Voor een bevredigende theorie in $\mathbf{C}^n$ hebben we meer nodig dan alleen subharmoniciteit:

Definitie 3.2. Een functie $u(z)$ op een gebied Ω wordt *plurisubharmonisch* (psh) genoemd wanneer

a) u boven semi-continu is op Ω en

b) $u|_l$ subharmonisch is op $l \cap \Omega$ voor alle complexe lijnen $l = \{a + bw : w \in \mathbf{C}\} \subset \mathbf{C}^n$.

Hieruit volgt dat u ook subharmonisch is. De eigenschappen (1) tot en met (4) gelden dus ook voor psh functies.

Opmerking. Neem aan dat u psh C^2 is in een omgeving van 0. Voor elke complexe lijn $l = \{aw : w \in \mathbf{C}\}$ is dus $u|_l$ subharmonisch in $w \in \mathbf{C}$ en een expliciete berekening laat zien dat

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0) a_i \bar{a}_j \geq 0 \quad \text{voor alle } a \in \mathbf{C}^n.$$

Definitie 3.3. Zij u en $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. De *Levivorm* $\mathcal{L}(u)$ van u definiëren we als de $n \times n$ matrix van distributionele afgeleiden $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right)_{ij}$. We gebruiken de conventie: $\mathcal{L}(-\infty)$ is de 0 matrix. We zeggen dat u een *positieve Levivorm* heeft, notatie: $\mathcal{L}(u) \geq 0$, als voor alle $a \in \mathbf{C}^n$, $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} a_i \bar{a}_j$ een positieve distributie is, i.e.

$$\int_\Omega \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} a_i \bar{a}_j \varphi \geq 0 \quad \text{voor alle positieve testfuncties } \varphi.$$

Tevens zeggen we dat u een grotere Levivorm heeft dan v, notatie: $\mathcal{L}(u) \geq \mathcal{L}(v)$, als $u - v$ òf lokaal integreerbaar òf $u - v \equiv -\infty$ is en $\mathcal{L}(u - v) \geq 0$.

Definitie-Lemma 3.4. *Een usc functie $u \not\equiv -\infty$ is plurisubharmonisch desda $\mathcal{L}(u) \geq 0$. Voor een C^2 functie u kunnen we $\mathcal{L}(u)$ ook beschouwen als de differentiaalvorm $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j$. Voor een willekeurige $u \in \mathrm{PSH}^*(\Omega)$ beschouwen we de coëfficiënten van deze "differentiaalvorm" als distributionele afgeleiden. Deze wordt dan een* stroom *(Engels: current) genoemd.*

Voor het verband tussen stromen en psh functies verwijzen we de lezer naar het klassieke boek van Lelong[8].

3.2 Lelonggetallen en harmonische majoranden

Definitie-Lemma 3.5. *Voor een psh functie u in een omgeving van een $z_0 \in \Omega \subset$ $\mathbf{C}^n$, wordt het* **Lelonggetal** $\nu_u(z_0)$ *van u in z_0 gedefinieerd als*

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\sup_{|z-z_0|=r} u}{\log r} = \lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{C_{r,n}} \int_{S_r(z)} u dS = \lim_{r\downarrow 0} \frac{\mu(B_r(z))}{m_{2n-2}(B_r(0) \cap \mathbf{C}^{n-1})}, \tag{3.3}$$

met $\mu = \frac{1}{2\pi}\Delta u$.

Bewijs en opmerkingen. Voor motivatie en het bewijs van (3.3) word verwezen naar Hörmander[4, Hoofdstuk 3 en 4], en Kiselman[5, Hoofdstuk 2]. Uit de eerste definitie volgt: $\nu_u(z_0) \geq 1$ desda $u(z) - \log|z - z_0|$ begrensd is van boven in een omgeving van z_0. Een belangrijk voorbeeld is: $u = \log|f|$ waarbij f een holomorfe functie op een gebied Ω in $\mathbf{C}^n$ is . Voor $n = 1$ geldt dan bijvoorbeeld dat $\nu_{\log|f|}(z)$ gelijk is aan de multipliciteit van het nulpunt van f in z. $\square$

Definitie-Lemma 3.6. *Zij (ν, μ) een paar met μ een positieve maat op $\mathbb{D}$ en ν een reële maat op $\mathbb{T}$. Dan is*

$$P_\nu(z) = \int_{\mathbb{T}} P(z,w)d\nu(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|z-w|^2}\,d\nu(w) \tag{3.4a}$$

een harmonische functie op $\mathbb{T}$ en

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{D}} G(z,\zeta)d\mu(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} \log\left|\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right| d\mu(\zeta) \tag{3.4b}$$

een subharmonische functie op $\mathbb{D}$. Hierin is $P(z,\xi)$ de Poissonkernel en $G(z,\xi)$ de Greenfunctie voor $\mathbb{D}$. In het bijzonder correspondeert met het paar (ν, μ) een subharmonische functie

$$I_{(\nu,\mu)} = P_\nu + G_\mu. \tag{3.4c}$$

De functie G_μ is niet identiek $-\infty$ desda $\int_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|)d\mu(\zeta) < \infty$. Stel nu dat μ de speciale vorm $2\pi\sum_{\zeta\in\mathbb{D}}\beta(\zeta)\delta_\zeta$ heeft voor een niet-negatieve functie β op $\mathbb{D}$. Wanneer $G_\mu \not\equiv -\infty$, dan heeft μ eindige maat op compacte verzamelingen en is β nul buiten een aftelbare verzameling en de som die G_μ definieert, convergeert in distributiezin. Als $G_\mu \not\equiv -\infty$ dan geldt dat $\Delta G_\mu = \mu$ en (dus) $\nu_{G_\mu} = \mu\{\bullet\} = \beta$. Er geldt zelfs dat G_μ de grootste, niet-negatieve *subharmonische functie is op $\mathbb{D}$ met het Lelonggetal in z minstens gelijk aan $\beta(z)$.*

Definitie 3.4. $S(\mathbb{D})$ is de verzameling subharmonische functies u op $\mathbb{D}$ met een harmonische majorand h uit de (Hardy klasse) $h^1(\mathbb{D})$, i.e, $u \leq h$ en

$$\limsup_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|d\theta < \infty$$

De verzameling (ν, μ), ν een reële maat op $\mathbb{T}$ met eindig positief deel, μ een positieve maat op $\mathbb{D}$ en

$$\int_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta^2|) d\mu(\zeta) < \infty$$

wordt genoteerd als $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{D}})$. Zulke paren worden ook beschouwd als één maat op $\bar{\mathbb{D}}$.

Stel dat $u = I_{(\nu,\mu)}$. Het is een natuurlijke vraag wat de condities op het paar (ν, μ) moeten zijn zodat $u \in S(\mathbb{D})$:

Stelling 3.7 (Littlewood). *Voor alle $u \in S(\mathbb{D})$ is er een positieve maat μ op $\mathbb{D}$ en een reële maat ν met eindige positieve deel op $\mathbb{T}$ (i.e. totale variatie $|\nu|(\mathbb{T}) < \infty$), zodanig dat*

$$\int_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta^2|) d\mu(\zeta) < \infty$$

en

$$u(z) = G_\mu(z) + P_\nu(z)$$

gelden. Omgekeerd, wanneer zulke ν en μ gegeven zijn, dan zit $u(z) = G_\mu(z) + P_\nu(z)$ in $S(\mathbb{D})$, G_μ is negatief en subharmonisch, $\lim_{r \to 1} G_\mu(re^{i\theta}) = 0$ b.o,

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} G_\mu(re^{i\theta}) d\theta = 0$$

en de functie P_ν is de kleinste harmonische majorand van u.

Anders geformuleerd zegt de stelling: $u \in S(\mathbb{D})$ desda $u = I_{(\nu,\mu)}$ met $(\nu, \mu) \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{D}})$. Zie Tsuji[15] voor een bewijs.

4 Holomorfe stromen

4.1 Inleiding

Poletsky heeft in zijn baanbrekend artikel *Holomorphic Currents* uit 1993 [3] een nieuwe methode geïntroduceerd om plurisubharmonische functies te construeren aan de hand van zogenaamde *omhulsels* van *schijffunctionalen*. Dit komt neer op het nemen van het (puntsgewijze) infinimum van een schijffunctionaal over een natuurlijke klasse van analytische schijven. Dit was nieuw in de theorie van plurisubharmonische functies. In het algemeen is het minimum van twee psh functies niet weer psh. Poletsky toont aan dat onder een aantal voorwaarden, dit omhulsel EH van een schijffunctionaal H wel een plurisubharmonische functie is. Het omhulsel blijkt tevens gelijk te zijn aan het supremum van een natuurlijke klasse van psh functies. Dit is niet vanzelfsprekend, want zoals al opgemerkt in hoofdstuk 3, in het algemeen is het supremum over een willekeurig klasse van psh functies niet usc en dus ook niet psh. Zijn theorie culmineert in de Dualiteitsstelling (Hier: Stelling 4.3).

Eerst abstraheert Poletsky de eigenschappen van in wezen de enige drie bekende schijffunctionalen (de Poissonfunctionaal, Rieszfunctionaal en de Lelongfunctionaal). Dit om een aantal axioma's, H1-H4 en A1-A4, op te stellen die de essentiële eigenschappen van deze drie functionalen weergeven. Door alleen gebruik te maken van deze axioma's, kan hij de Dualiteitsstelling bewijzen. Een volledige formulering van deze *voorwaarden* zou heel veel ruimte vragen. Een gedetailleerde beschrijving van de bewijzen van de hoofdstelling al helemaal. Hoewel ik dit oorspronkelijk ook van plan was, is dit niet nodig gebleken. Ik ben niet kunnen doorgedrongen tot het hart van Poletsky's bewijs van de Dualiteitsstelling. Een aantal experts zijn er zelfs niet van overtuigd dat het bewijs klopt. Het is veelzeggend dat Lárusson en Sigurdsson in de abstract van [7] opmerken: "Through work of Evgeny Poletsky, it has *transpired*[4] that certain disc functionals on domains in $\mathbf{C}^n$ have plurisubharmonic envelopes".

Voor de enige drie schijffunctionalen zijn in [7] simpelere bewijzen gegeven. Lárusson en Sigurdsson hebben tevens de resultaten van Poletsky gegeneraliseerd van gebieden in $\mathbf{C}^n$ naar een ruime klasse van complexe variëteiten. In deze klasse zitten bijvoorbeeld alle Riemann oppervlakken en gebieden in Steinse variëteiten.

Een aantal belangrijke ingrediënten en definities uit het (lange) artikel van Poletsky heb ik geïsoleerd. Mijn hoop is dat de lezer tenminste de formulering van de Dualiteitsstelling begrijpt en misschien zelfs kan toepassen op nieuwe functionalen, anders dan de nu[5] bekende.

[3] in [9] uit 1991 werd hiervan al een simpele variant geintroduceerd

[4] Mijn cursivering.

[5] We schrijven juni 2001.

4.2 De drie hoofdfunctionalen

Definitie 4.1. Zij $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ een gebied in $\mathbf{C}^n$. Dan definiëren we de ruimte van ***gesloten analytische schijven*** als

$$\mathcal{A}_\Omega = \{f : \bar{\mathbb{D}} \longrightarrow \Omega : f \text{ holomorf in een omgeving van } \bar{\mathbb{D}}\}.$$

Tevens: $\mathcal{A}_\Omega(z) = \{f \in \mathcal{A}_\Omega : f(0) = z\}$. Een ***schijffunctionaal*** op Ω is een afbeelding $H : \mathcal{A}_\Omega \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$. Een schijffunctionaal H noemen we ***van boven begrensd op compacta*** als voor alle compacte deelverzamelingen M van Ω, een constante $C > 0$ bestaat zodanig dat

$$H(f) < C \quad \text{voor alle } f \in \mathcal{A}_\Omega \text{ met } f(\bar{\mathbb{D}}) \subset M$$

geldt. Een schijffunctionaal H noemen we ***boven semi continu***, afgekort: ***usc***, wanneer het volgende geldt. Als $\{f_j\} \subset \mathcal{A}_\Omega$ een rij is die uniform convergeert op compacte verzamelingen van $\mathbb{D}$ naar een $f \in \mathcal{A}_\Omega$ en bijna overal op $\mathbb{T}$, dan $\limsup_{j\to\infty} H(f_j) \le H(f)$.

Het ***omhulsel*** van een schijffunctionaal H is de functie $\mathrm{EH} : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ gedefinieerd door

$$\mathrm{EH}\,(z) = \inf_{f \in \mathcal{A}_\Omega(z)} H(f).$$

Definitie 4.2. Zij ϕ een usc functie op Ω. De ***Poissonfunctionaal*** $H_1 = H_1^\phi$ geassocieerd met ϕ is de schijffunctionaal gedefinieerd door

$$H_1^\phi : \quad \mathcal{A}_\Omega \ni f \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \phi \circ f \, d\lambda. \tag{4.1}$$

De Poissonfunctionaal is begrensd op compacta van Ω: als M een compacte deelverzameling van Ω is, dan: $H_1^\phi(f) \le \sup_M \phi$. Tevens is H_1^ϕ usc: zie Lemma 5.7. Verder definiëren we $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1^\phi = \{w \in \mathrm{PSH}(\Omega) : w \le \phi\}$.

Definitie 4.3. Zij v een plurisubharmonische functie op Ω. De ***Rieszfunctionaal*** $H_2 = H_2^\phi$ geassocieerd met v, is de schijffunctionaal gedefinieerd door:

$$H_2^v : \quad \mathcal{A}_\Omega \ni f \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } v \circ f \equiv -\infty \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \log|\bullet| \Delta(v \circ f) & \text{anders.} \end{cases} \tag{4.2}$$

De Rieszfunctionaal is begrensd op compacta van Ω: $H_2^v(f) \le 0$ voor ***alle*** $f \in \mathcal{A}_\Omega$. Verder definiëren we $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2^v = \{w \in \mathrm{PSH}(\Omega) : \; w \le 0 \text{ en } \mathcal{L}(w) \ge \mathcal{L}(v)\}$.

Lemma 4.1. *De Rieszfunctionaal is in het algemeen niet usc.*

Bewijs. Beschouw $\Omega = B_1^2(0) \subset \mathbf{C}^2$. Neem $a_j \in \mathbf{C}^*$, $k_j \in \mathbf{R}_{>0}$ zodanig dat $a_j \to 0$ voor $j \to \infty$ en $v_1(0) = -1$ met $v_1(\xi)$ de subharmonische functie $\sum_j k_j \log|\xi - a_j|$. Beschouw nu $v \in \mathrm{PSH}^*(\Omega)$: $v(\zeta, \xi) = \max(v_1(\xi) + |\zeta|^2, -2)$. Dan: $\Delta_\zeta v(\zeta, 0) = 4$ en $v(\zeta, a_j) \equiv -2$. Definieer de analytische schijven f_j en f in Ω: $f_j(\zeta) = (\zeta, a_j)$ en $f(\zeta) = (\zeta, 0)$. Dan convergeert f_j uniform naar f op $\bar{\mathbb{D}}$. We hebben $H_2^v(f_j) = 0$ en

$$\begin{aligned} H_2^v(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \log|\bullet| \Delta(v \circ f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} \log r \cdot 4 \cdot r dr d\phi \\ &= 2 \int_0^1 \Big((r^2 \log r)' - r \Big) dr = -1, \end{aligned}$$

en dus: $\limsup_{j\to\infty} H_2^v(f_j) = 0 > -1 = H_2^v(f)$. □

Definitie 4.4. De ***Lelongfunctionaal*** $H_3 = H_3^\alpha$ geassocieerd met een niet-negatieve functie α, is de schijffunctionaal gedefinieerd door

$$H_3^\alpha : \quad \mathcal{A}_\Omega \ni f \mapsto \sum_{\zeta\in\mathbb{D}} \alpha(f(\zeta)) m_\zeta(f) \log|\zeta|. \tag{4.3}$$

De som is gedefinieerd als het infinimum van zijn partiële sommen en, $m_\zeta(f)$ is de multipliciteit van f in ζ. De Lelongfunctionaal is begrensd op compacta van Ω: $H_3^\alpha(f) \le 0$ voor ***alle*** $f \in \mathcal{A}_\Omega$. Verder definiëren we: $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_3^\alpha = \{w \in \mathrm{PSH}(\Omega) : w \le 0 \text{ en } \nu_w \ge \alpha\}$.

In de hoofdstukken 5, 6 en 7 zullen we de volgende stelling bewijzen:

Stelling 4.2. *Zij $H = H_i$ de Poisson-, Riesz- (met v continu) of Lelongfunctionaal op een gebied Ω in $\mathbf{C}^n$, met $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$ de corresponderende verzameling psh functies. Dan is het omhulsel $u = \mathrm{EH}$ psh en geldt de dualiteit*

$$u(z) = \inf_{f\in\mathcal{A}_\Omega(z)} H(f) = \sup_{w\in\mathcal{F}} w(z).$$

4.3 Dualiteitsstelling van Poletsky

Het doel van deze sectie is om zoveel uit te leggen dat de lezer de formulering van de Dualiteitsstelling begrijpt. Het is bekend dat $\mathrm{PSH}(\Omega)$ gesloten is onder het nemen van eindige maxima. In het algemeen is het minimum van twee psh functies echter niet psh. Poletsky[10] heeft laten zien dat het infinimum van bepaalde schijffunctionalen over een natuurlijke klasse van analytische schijven psh is. Bovendien heeft hij de dualiteit bewezen tussen het nemen van infinimum van bepaalde schijffunctionalen over analytische schijven en (puntsgewijze) supremum over een natuurlijke klasse van psh functies.

Definitie 4.5. Zij Ω een gebied in $\mathbf{C}^n$. We definiëren $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ als de ruimte van alle conforme afbeeldingen van $\mathbb{D}$ naar zichzelf, de afbeeldingen $\zeta \mapsto \zeta^m$, $m = 1,2,3,\cdots$ en de afbeeldingen $e(\bullet; w, c)$, gedefinieerd door: $\zeta \mapsto \exp(c(\zeta - w)/(\zeta + w))$, met $w \in \mathbb{T}$ en $c > 0$. We noemen $\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D},\Omega) = \{(f,Z) : f \in \mathcal{O}(\mathbb{D},\Omega),\ Z \subset \mathbf{C}\}$ de ruimte van ***gemarkeerde afbeeldingen*** of ***gemarkeerde schijven***, $\tilde{\mathcal{O}}(\bar{\mathbb{D}},\Omega) = \{(f,Z) : f \in \mathcal{A}_\Omega,\ Z \subset \mathbf{C}\}$ en $\tilde{\mathcal{O}}_0(\mathbb{D},\Omega) = \{(f,Z) \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D},\Omega) : f(\mathbb{D}) \Subset \Omega\} \subset \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D},\Omega)$. We definiëren een afbeelding $\circ : \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D},\Omega) \times \mathcal{O}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D},\Omega)$, genaamd ***compositie***, door $((f,Z),g) \mapsto (f,Z)\circ g = (f\circ g, g^{-1}(Z))$. We noemen een verzameling $M \subset \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D},\Omega)$ ***$\mathcal{F}$-invariant*** als $\circ(M,\mathcal{F}) \subset M$. De verzamelingen $\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D},\Omega)$, $\tilde{\mathcal{O}}(\bar{\mathbb{D}},\Omega)$ en $\tilde{\mathcal{O}}_0(\mathbb{D},\Omega)$ zijn respectievelijk wel, niet en wel $\mathcal{F}$-invariant. Als $p = (f,Z) \in \tilde{\mathcal{O}}_0(\mathbb{D},\Omega)$, dan bestaan de radiale limieten b.o. op $\mathbb{T}$.

Definitie 4.6. Stel $\Phi : M \longrightarrow \mathcal{B}(\bar{\mathbb{D}})$ met $M \subset \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D},\Omega)$, $p \mapsto (\nu_p, \mu_p) \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{D}})$. We noemen $\Phi^o(p) = \nu_p$ de ***uitwendige*** en $\Phi^i(p) = \mu_p$ de ***inwendige*** van Φ. Φ induceert een schijffunctionaal H op Ω, met domein M, gedefinieerd door

$$H : \quad p \mapsto I_{\Phi(p)}(0) = \int_{\mathbb{D}} \log|\zeta|\, d\mu_p(\zeta) + \int_{\mathbb{T}} d\nu_p.$$

Merk op dat het domein van H niet alleen uit functies bestaat, maar uit paren (f, Z). De eerste term aan de rechterhandzijde noemen we de *inwendige schijffunctionaal geassocieerd met* Φ, notatie: $H^i(p) = G_{\Phi^i(p)}(0)$. Het omhulsel van de geïnduceerde schijffunctionaal H wordt vaak geschreven als $\mathrm{E}\Phi$ i.p.v. $\mathrm{E}H$:

$$\mathrm{E}\Phi(z) = \inf_{\substack{p=(f,Z)\in M\\ f(0)=Z}} H(p).$$

Φ wordt ***invariant*** genoemd indien zijn domein M $\mathcal{F}$-invariant is en $\Phi^i(p \circ g) = (g^*\Phi^i(p))_U$ geldt voor alle $g \in \mathcal{A}_{\mathbb{D}}$.

De afbeelding Φ wordt een ***holomorfe stroom*** genoemd als aan de volgende voorwaarden is voldaan.

(H1) $\tilde{\mathcal{O}}(\bar{\mathbb{D}}, \Omega) \subset M$ en M is $\mathcal{F}$-invariant;

voor alle $p = (f, Z) \in M$:

(H2) $q = (f, \mathbb{D} \cap Z) \in M$ en $H(p) = H(q)$.

(H3) Als $g \in \mathcal{F}$, dan $\Phi(p \circ g) = g^*\Phi(p)$, als g proper is of $0 \notin Z$.

(H4) Zij $p = (f, Z) \in \tilde{\mathcal{O}}(\bar{\mathbb{D}}, \Omega)$, $0 \notin Z$. Stel ook $g \in \mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^2, \mathbb{D})$ met $g(0,0) = 0$ en beschouw $q(\xi) = p \circ g(\bullet, \xi)$. Dan moet gelden: voor alle $\epsilon > 0$ is er een $p_\epsilon = (h, W)$, $h(0) = f(0)$, $0 \notin W$ zodanig dat [6]

$$H(p_\epsilon) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}}^{-} H(q(w))\, d\lambda(w) + \epsilon. \tag{4.4a}$$

Een holomorfe stroom wordt ***inwendig*** genoemd indien, in plaats van (4.4a),

$$H(p_\epsilon) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}}^{-} H(q(w))\, d\lambda(w) + H^i(p \circ g(0, t\xi)) + \epsilon \tag{4.4b}$$

waar is voor alle $0 < t < 1$.

Een holomorfe stroom is dus een afbeelding die aan een complexe kromme Γ in Ω met een gemarkeerde verzameling $Z \subset \mathbf{C}$, een maat toekent op $\bar{\mathbb{D}}$, die positief op $\mathbb{D}$ is en eindige variatie heeft op $\mathbb{T}$. De verklaring van het woord *stroom* komt uit de elektromagnetisme: beschouw de maat als een ladingsverdeling op de (holomorfe) kromme.[7] De toegekende maat moet tevens invariant zijn onder globale coördinatentransformatie (eigenschap H3). De maat is dus alleen afhankelijk van de kromme, haar rand en de verzameling Z. Globaal genomen bestaat Z uit de punten waar $\Phi(p)$ atomen heeft. De volgende eigenschap blijk ook nodig te zijn. Wanneer een gemarkeerde afbeelding p is vastgezet, dan is de functie

$$\xi \mapsto \inf_{\substack{g\in\mathcal{O}(\mathbb{D},\mathbb{D})\\ g(0)=\xi}} H(p \circ g),$$

subharmonisch op $\mathbb{D}$. Eigenschap (H4) dient hiervoor.

[6] Zij $\varphi : Y \longrightarrow \bar{R}$, Y een topologische ruimte met een Borelmaat μ. De *bovenintegraal* van ϕ wordt gedefinieerd als het infinimum van alle integralen van alle Borelfuncties $\psi \geq \varphi$ en wordt genoteerd als $\int_Y^- \varphi\, d\mu(y)$. Merk op dat apriori $H(q(w))$ niet meetbaar hoeft te zijn.

[7] Dit is mijn interpretatie, want Poletsky[10] zelf blijft er vaag over.

Voorbeeld 4.7. De schijffunctionalen H_1, H_2 en H_3 komen van zulke paren maten. In alle drie de gevallen: $M = \tilde{\mathcal{O}}(\bar{\mathbb{D}}, \Omega)$. Voor H_1: $\Phi_1^\phi((f,Z)) = (0, \phi \circ f_{|\mathbb{T}} d\lambda)$. Voor H_2: $\Phi_2^v((f,Z)) = (\Delta(v \circ f), 0)$. Voor H_3:

$$\Phi_3^\alpha((f,Z)) = \left(2\pi \sum_{\xi \in \mathbb{D}} \alpha(f(\xi)) m_\xi(f) \delta_\xi, 0\right),$$

met δ_ξ de Diracmaat in het punt ξ. In alle gevallen is de gedefinieerde stroom Φ niet afhankelijk van de verzameling Z. Daarom schrijven we (met misbruik van notatie): $M = \mathcal{A}_\Omega$.

Opmerking 4.8. Beschouw voor een niet-negatieve ***usc*** functie α de holomorfe stroom Φ met domein $M = \tilde{\mathcal{O}}(\bar{\mathbb{D}}, \Omega)$ en die gedefinieerd wordt door

$$M \ni p = (f, Z) \mapsto \left(2\pi \sum_{\xi \in \mathbb{D} \cap Z} \alpha(f(\xi)) m_\xi(f) \delta_\xi, 0\right).$$

Voor het geassocieerde omhulsel hebben we:

$$\mathrm{E}\Phi(z) = \inf_{\substack{p=(f,Z)\in M \\ f(0)=z}} \sum_{\zeta \in \mathbb{D} \cap Z} \alpha(f(\zeta)) m_\zeta(f) \log|\zeta| \quad \text{voor alle } z \in \Omega.$$

Dit is hoe Poletsky[10] de Lelongfunctionaal definieert. Omdat α niet-negatief is en: $(f,Z) \in M \implies (f, \mathbb{D}) \in M$, volgt onmiddellijk: $\mathrm{E}\Phi = \mathrm{EH}_3^\alpha$. Hoewel $\Phi \neq \Phi_3^\alpha$ en $H_3^\alpha \neq H$, bij het overgaan op het omhulsel krijgen we gelijkheid. We hadden dus net zo goed de verzamelingen Z buiten beschouwing kunnen laten. Ik ken geen holomorfe stroom die op een "niet-triviale" manier afhankelijk is van de gemarkeerde verzamelingen Z.

Merk verder op dat Poletsky een extra eis legt op α: usc. Dus [7] generaliseert wederom een deel van Poletsky's artikel, daar in [7] voor α een willekeurige niet-negatieve functie genomen mag worden[8].

Omdat we te maken hebben met een variationele probleem, moet wel duidelijk zijn wat de toegestane variaties zijn van de gemarkeerde afbeeldingen. We eisen enige analytische eigenschappen voor waarden van H op zulke variaties. De enige redelijke keuze van toegestane variaties zijn holomorfe families, i.e. een familie van gemarkeerde afbeeldingen $p(x) = (f(\bullet, x), Z(x))$, waarin $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D} \times G, \Omega)$ met G een domein in $\mathbf{C}^k$, de verzameling $Z(x)$ uit aftelbaar veel punten $\zeta_j(x)$ bestaat met $\zeta_j(x)$ holomorf in x. Verder eisen we dat onze familie regulier is: $f(\zeta_j(x), x) = c_j$ is onafhankelijk van x. Dit, om te voorkomen dat atomen niet opeens verdwijnen wanneer we x variëren.

Eerder hebben we bewezen (Lemma 4.1) dat in het algemeen H_2 niet usc is. Het blijkt dat het wel *bijna boven semi-continu* is. Dit eisen we ook voor $H(p(x))$ voor alle reguliere holomorfe afbeeldingen $p(x)$. In de definitie van ausc wordt gebruik gemaakt van het begrip *bijna boven semi-continu* functie. De precieze definitie geven we hier niet, maar verwijzen de lezer naar Poletsky[10, Hoofdstuk 4]. Behalve bijvoorbeeld alle usc functies, zijn ook superharmonische functies ausc.

[8] Voor gebieden in $\mathbf{C}^n$.

Definitie 4.9. Een functionaal H gedefinieerd op een $M \subset \tilde{\mathcal{O}}(\bar{\mathbb{D}}, \Omega)$ heet ***bijna boven semicontinu (ausc)*** als

(A1) Voor alle $p = (f, Z) \in M$ en $\epsilon > 0$ bestaat er een *eindige* verzameling $W \subset Z$ zodanig dat $q = (f, W) \in M$ en $H(q) < H(p) + \epsilon$.

(A2) Voor alle reguliere holomorfe families $p(x) = (f(\bullet, x), Z(x))$, $x \in G \subset \mathbf{C}^k$, de functie $x \mapsto H(p(x))$ is Borel en ausc in G.

(A3) Als $p = (f, Z) \in M$ en $p_t = (f(t\bullet), t^{-1}Z)$, $0 < t < 1$, dan moet gelden: $\limsup_{t \to 1} H(p_t) \leq H(p)$.

(A4) Als V een stabiele omgeving voor een reguliere holomorfe familie $p(x)$, en $V' \subset V$ is een andere omgeving van $\bar{\mathbb{D}} \times G$, dan: voor alle rij van holomorfe afbeeldingen $g_k : V' \longrightarrow V$ die uniform convergeren naar de identiteitsafbeelding op V' en voor alle $\epsilon > 0$ het volgende geldt:

$$\lim_{k \to \infty} m(\{x \in G : \, H(p_k(w)) \geq H(p(x)) + \epsilon\}) = 0$$

waarin $p_k(x) = p \circ g_k(\bullet, x)$ volledige composities zijn.

Definitie 4.10. Zij v psh. We zeggen dat v ***niet groter*** is dan Φ^o, notatie: $v \leq \Phi^0$, wanneer $v \circ f d\theta \leq \Phi^o$ op $\mathbb{T}$, i.e.

$$\int_E v \circ f(e^{i\theta}) d\theta \leq \Phi^o(f)(E) \qquad \text{voor alle } f \in \mathcal{A}_\Omega \tag{4.6}$$

en alle Borelverzamelingen $E \subset \mathbb{T}$.[9] We zeggen dat v ***niet groter*** is dan Φ^i, notatie: $v \leq \Phi^i$, wanneer er geldt dat

$$\Phi^i(f) \leq \Delta(v \circ f), \text{ i.e. } \Phi^i(f)(E) \leq \int_E \Delta(v \circ f) \tag{4.7}$$

voor alle $f \in \mathcal{A}_\Omega$ en alle Borelverzamelingen $E \subset \mathbb{D}$. Tenslotte zeggen we dat v ***niet groter*** is dan Φ, notatie: $v \leq \Phi$, wanneer $v \leq \Phi^o$ en $v \leq \Phi^i$. De (misschien) op het eerste gezicht wat rare richting van de ongelijkheidstekens komt vanwege: $v \leq \Phi^o \Rightarrow P_{v \circ f d\Theta} \leq P_{\Phi^o(f)}$, $v \leq \Phi^i \Rightarrow G_{\Delta(v \circ f)} \leq G_{\Phi^i(f)}$ en $v \leq \Phi \Rightarrow I_{(v \circ f d\Theta, \Delta(v \circ f)}$.

We kunnen nu eindelijk de hoofdstelling voor holomorfe stromen formuleren:

Stelling 4.3 (Dualiteitsstelling). *Zij Φ een invariante ausc holomorfe stroom die van boven begrensd is op compacta van een gebied $\Omega \subset \mathbf{C}^n$. Dan is het omhulsel $u = \mathrm{E}\Phi$ psh en geldt er de dualiteit*

$$\mathrm{E}\Phi = \sup_{\substack{v \in \mathrm{PSH}(\Omega) \\ v \leq \Phi}} v,$$

oftewel

$$\inf_{\substack{p=(f,Z) \in M \\ f(0)=z}} H(p) = \sup_{\substack{v \in \mathrm{PSH}(\Omega) \\ v \leq \Phi}} v(z) \text{ voor alle } z \in \Omega \text{ en}$$

waarbij H de door Φ geïnduceerde functionaal is.

[9] In Poletsky[10] wordt dit gedefinieerd als $\frac{1}{2\pi} v \circ f(e^{i\Theta}) d\Theta \leq \Phi^o$, met een factor 2π. Dit is echter fout.

Voorbeeld 4.11 (Poissonstroom). $w \leq \Phi = \Phi_1^{\phi}$. (4.6) en (4.7) reduceren tot

$$\int_E w \circ f(e^{i\theta}) d\theta \leq \int_E \phi \circ f(e^{i\theta}) d\theta \quad \text{en} \quad 0 = \Phi^i(f) \leq \int_E \Delta(w \circ f)$$

voor alle $f \in \mathcal{A}_\Omega$, Borel $E \subset \mathbb{D}$ en Borel $F \subset \mathbb{T}$. De laatste ongelijkheid is altijd waar, omdat w psh is en de eerste ongelijkheid is equivalent met $w \leq \phi$ (neem $f \equiv z_0$).
De Dualiteitsstelling geeft:

$$u(z) = \inf_{f \in \mathcal{A}_\Omega(z)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f \circ \phi \, d\lambda = \sup_{\substack{w \in \mathrm{PSH}(\Omega) \\ w \leq \phi}} w(z),$$

en u is psh.

Voorbeeld 4.12 (Rieszstroom). $w \leq \Phi = \Phi_2^v$: (4.6) en (4.7) reduceren tot

$$\int_F w \circ f d\Theta \leq \Phi^o(f) = 0$$

en

$$\int_E \Delta(v \circ f) \leq \int_E \Delta(w \circ f)$$

voor alle $f \in \mathcal{A}_\Omega$, Borel $E \subset \mathbb{D}$ en Borel $F \subset \mathbb{T}$. Dit is equivalent met (kies $f \equiv z_0$), $w \leq 0$ en

$$\int_E \Delta(w \circ f) \geq \int_E \Delta(v \circ f),$$

oftewel, $\mathcal{L}(w) \geq \mathcal{L}(w)$.
De Dualiteitsstelling geeft:

$$u(z) = \inf_{f \in \mathcal{A}_\Omega(z)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|\bullet| \;\Delta(v \circ f) = \sup_{\substack{w \leq 0 \\ \mathcal{L}(w) \geq \mathcal{L}(v)}} w(z),$$

en u is psh.

Voorbeeld 4.13 (Lelongstroom). $v \leq \Phi = \Phi_3^\alpha$: (4.6) en (4.7) reduceren tot

$$\int_F w \circ f d\theta \leq \Phi^o(f) = 0$$

en

$$\int_E 2\pi \sum_{\zeta \in \mathbb{D}} \alpha(f(\zeta)) m_\zeta(f) \delta_\zeta = 2\pi \sum_{\zeta \in E} \alpha(f(\zeta)) m_\zeta(f) \leq \int_E \Delta(w \circ f).$$

voor alle $f \in \mathcal{A}_\Omega$, Borel $F \subset \mathbb{T}$ en Borel $E \subset \mathbb{D}$. Formule (7.1a) uit hoofdstuk 7 toont dat bovenstaande ongelijkheid gelijkwaardig is met $\nu_w \geq \alpha$.
De Dualiteitsstelling luidt in dit geval:

$$u(z) = \inf_{f \in \mathcal{A}_\Omega(z)} 2\pi \sum_{\zeta \in \mathbb{D}} \alpha(f(\zeta)) m_\zeta(f) \log|\zeta| = \sup_{\substack{w \leq 0 \\ \nu_(w) \geq \alpha}} w(z),$$

en u is psh.

5 De Poissonfunctionaal

Lemma 5.1. *Voor een gebied $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ is de L^1_{loc} topologie op* $\mathrm{PSH}^*(\Omega)$ *hetzelfde als de topologie geïnduceerd door de ruimte van distributies $D'(\Omega)$ op Ω. Aangezien $L^1_{loc}(\Omega)$ een volledige metrische ruimte is, is de topologie van* $\mathrm{PSH}^*(\Omega)$ *dus geïnduceerd door een metriek.*

Bewijs. Zie: Hörmander[4, Stelling 3.2.12]. □

Lemma 5.2. *Als $\mathcal{F} \subset \mathrm{PSH}^*(\Omega)$ compact is, dan is $\sup \mathcal{F}$ usc en daarom ook psh*

Bewijs. Voor een $r > 0$, $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ definiëren we $\Omega_r = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > r\}$.

Het enige niet-triviale wat nagegaan moet worden is het usc zijn van $u = \sup \mathcal{F}$. is. De submiddelwaarde eigenschap volgt zoals gewoonlijk door toepassing van de 'limsup variant' van het lemma van Fatou.

Neem een $\beta > 0$, $x_0 \in \Omega$ met $u(x_0) < \beta$. Aan te tonen: $\{x \in \Omega : u(x) < \alpha\}$ is open. Kies een $\epsilon > 0$ zodanig dat $u(x_0) < \beta - \epsilon$. Als $w_0 \in \mathcal{F}$ en r_0 voldoende klein is, dan geldt

$$w_0(x_0) \leq (\mathcal{M}_{r_0}(w_0))(x_0) \leq u(x_0) < \beta - \epsilon.$$

Nu is de functie $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times \Omega_r \mapsto \mathbf{R}$ gedefinieerd door $(f, x) \mapsto (\mathcal{M}_{r_0}(f))(x)$ continu en er bestaat daarom een open omgeving U_0 van $w_0 \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ en een open omgeving V_0 van x_0, zodanig dat

$$\mathcal{M}_{r_0}(w) < \beta - \epsilon \qquad \forall w \in \mathcal{U}_0 \, \forall x \in V_0. \tag{5.1}$$

Omdat $\mathcal{F}$ compact is en w_0 willekeurig gekozen was, bestaat er een eindige open *overdekking* $U_1, U_2, \cdots, U_N$ van $\mathcal{F}$ en open omgevingen $V_1, V_2, \cdots, V_N$ van x_0 zodanig dat (5.1) geldt voor alle $w \in U_j$. Definieer nu $V = \cap_j V_j$. Dan: $V \subset \{x \in \Omega : u(x) < \beta\}$. □

Propositie 5.3. *Zij ϕ een usc functie op een gebied $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ en $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\phi = \{v \in \mathrm{PSH}(\Omega) : v \leq \phi\}$. Dan $\sup \mathcal{F} \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ en $\sup \mathcal{F} \leq \mathrm{EH}_1^\phi$. Ook geldt: $\mathrm{EH}_1^\phi \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ desda $\mathrm{EH}_1^\phi \in \mathcal{F}$ en dan geldt $\mathrm{EH}_1^\phi = \sup \mathcal{F}$.*

Bewijs. Zonder verlies van algemeenheid: $\mathcal{F} \neq \{-\infty\}$. Zij $v_0 \in \mathcal{F} \setminus \{-\infty\}$ en beschouw de deelverzameling $\mathcal{F}_0 = \{v \in \mathcal{F} : v \geq v_0\}$. Aangezien ϕ usc, is een rij in $\mathcal{F}_0$ lokaal uniform van boven begrensd. Omdat $v \geq v_0$ voor elke $v \in \mathcal{F}_0$, convergeert de rij niet naar $-\infty$ lokaal uniform. Daarom is er een deelrij die naar een w in $\mathrm{PSH}(\Omega)$ convergeert. Er geldt zelfs dat w de usc regularisatie is van de limsup van de deelrij (Zie: Hörmander, loc. cit.). Omdat ϕ usc is, volgt uit de definitie van usc regularisatie : $w \leq \phi$. Dus $w \in \mathcal{F}_0$. Bovenstaand argument toont dat $\mathcal{F}_0$ rijcompact is en dan ook compact, daar de topologie geïnduceerd wordt door een metriek (Lemma 5.1). Uit Lemma 5.2 volgt dan: $\sup \mathcal{F} \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Voor alle $v \in \mathcal{F}$ en $f \in \mathcal{A}_\Omega$ geldt:

$$v(f(0)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} v \circ f \, d\lambda \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \phi \circ f \, d\lambda = H_1^\phi(f).$$

Neem voor een vaste z het infinimum over alle $f \in \mathcal{A}_\Omega(z)$ en het supremum over alle $v \in \mathcal{F}$: $\sup \mathcal{F} \leq \mathrm{EH}_1^\phi$.
De rest van de propositie is een onmiddellijk gevolg van $\mathrm{EH}_1^\phi \leq \phi$:

$$\mathrm{EH}_1^\phi(z) = \inf_{f \in \mathcal{A}_\Omega(z)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \phi \circ f \, d\lambda \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \phi(z) \; d\lambda(\xi) = \phi(z).$$

□

Stelling 5.4 (Hoofdstelling voor de Poissonfunctionaal). *Zij ϕ een usc functie op een gebied $\Omega \subset \mathbf{C}^n$. Dan is $u = \mathrm{EH}_1^\phi$ psh en voor alle $z \in \Omega$ geldt*

$$u(z) = \inf_{h \in \mathcal{A}_\Omega(z)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \phi \circ h \, d\lambda = \sup_{v \in \mathcal{F}_1^\phi} v(z),$$

met $F_1^\phi = \{v \in \mathrm{PSH}(\Omega) : \, v \leq \phi\}$.

Bewijs. Het enige dat hier nog bewezen dient te worden is, dat u psh is. De rest volgt uit Propositie 5.3.

(a) Vanwege de monotone convergentiestelling: $H_1^{\phi_j} \searrow H_1^\phi$ wanneer $j \to \infty$ voor elke rij van usc $\phi_j \searrow \phi$ en dus $\mathrm{EH}_1^{\phi_j} \searrow \mathrm{EH}_1^\phi$. Omdat een limiet van een dalende reeks van psh functies psh is en omdat er een dalende rij van continue functies is die convergeert naar ϕ, mogen we in het bewijs -zonder verlies van algemeenheid- aannemen dat ϕ continu is.

(b) In Lemma 5.5 bewijzen we het bestaan van *holomorfe variaties van analytische schijven.* Daarna wordt Lemma 5.6 bewezen; een gevolg van dit lemma is dat de verzameling $\{x \in \Omega : \, u(x) < \beta\}$ voor alle $\beta > 0$ open is. Dus u is usc

(c) We willen aantonen dat u subharmonisch is op complexe lijnen. Vanwege (b) zijn we klaar, als we de submiddelwaarde eigenschap op complexe lijnen kunnen aantonen:

$$u \circ h(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} u \circ h \, d\lambda \quad \text{voor alle } h \in \mathcal{A}_\Omega.$$

Zet een $h \in \mathcal{A}_\Omega$ vast. Omdat u usc is en elk usc functie de limiet is van een dalende rij continue functies is, is het genoeg om aan te tonen dat voor elke $\epsilon > 0$ en continue functie W op Ω met $W \geq u$, er een $g \in \mathcal{A}_\Omega$ is met $g(0) = h(0)$ zodanig dat

$$H_1^\phi(g) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} W \circ h \, d\lambda + \epsilon \tag{5.2a}$$

geldt.

De constructie van g volgt uit de lemma's 5.7, 5.9 en 5.10:

Lemma 5.7: $\exists r > 1$ en $F \in C^\infty(\mathbb{D}_r \times \mathbb{T}, \Omega)$ met $F(\bullet, w) \in \mathcal{A}_\Omega$, $F(0, w) = h(w)$ voor alle $w \in \mathbb{T}$ en

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} H_1^\phi(F(\bullet, w)) \; d\lambda(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} W \circ h \, d\lambda + \epsilon \tag{5.2b}$$

Lemma 5.9: $\exists s \in (1, r)$ en $G \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_s \times \mathbb{D}_s, \Omega)$ met $G(0, w) = h(w)$ voor alle $w \in \mathbb{D}_s$ en

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} H_1^{\phi}(G(\bullet, w))\ d\lambda(w) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} H_1^{\phi}(F(\bullet, w))\ d\lambda(w) + \epsilon \tag{5.2c}$$

Lemma 5.10: $\exists \Theta_0 \in [0, 2\pi)$ met

$$H_1^{\phi}(g) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} H_1^{\phi}(G(\bullet, w))\ d\lambda(w) \tag{5.2d}$$

waarin $g(\zeta) := G(e^{i\theta_0}\zeta, \zeta)$.

(d) De ongelijkheid (5.2a) volgt door de ongelijkheden (5.2b), (5.2c) en (5.2d) te combineren.

□

Lemma 5.5. *Zij $f_0 \in \mathcal{A}_\Omega$. Dan bestaat er een open omgeving V van $x_0 = f_0(0)$ in Ω, $r > 1$ en $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r \times V, \Omega)$ met*

(i) *$f(\zeta, x_0) = f_0(\zeta)$ voor alle $\zeta \in \mathbb{D}_r$ en*

(ii) *$f(0, x) = x$ voor alle $x \in V$*

Verder geldt dat wanneer f_0 niet constant is, we voor elke eindige verzameling $M \subset \mathbb{D}^*$, f kunnen kiezen zodanig dat $f(a, x) = f_0(a)$ en $m_a(f(\bullet, x)) = m_a(f_0)$ voor alle $a \in M$ en voor alle $x \in V$. Als f_0 constant is, is het mogelijk om voor alle M als boven en met daarbij $N > 0$, f zo te kiezen dat $f(a, x) = f_0(a)$ en $m_a(f(\bullet, x)) \geq N$ geldt voor alle $a \in M$ en voor alle $x \in V$.

Bewijs. $M = \emptyset$**:** definieer f als: $f(\zeta, x) = (x - x_0) + f_0(\zeta)$.

$M \neq \emptyset$**:** dan: $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\} \subset \mathbb{D}^*$. Beschouw nu

$$f(\zeta, x) = \frac{(\zeta - a_1)^{k_1} \cdots (\zeta - a_m)^{k_m}}{(-1)^{k_1 + \cdots k_m} a_1^{k_1} \cdots a_m^{k_m}}(x - x_0) + f_0(\zeta).$$

De k_i moeten nog geschikt gekozen worden. Als f_0 niet constant is bestaan er $k_i \geq m_{a_i}(f_0)$ met $m_a(f(\bullet, x)) = m_a(f_0)$ $\forall a \in M$. Als f_0 constant is, kies dan de $k_i \geq N$. A priori geldt alleen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r \times \mathbf{C}^n, \mathbf{C}^n)$ *waarbij* $f_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r, \Omega)$. Omdat $\bar{\mathbb{D}}$ compact is, volgt uit $f(\mathbb{D}_r, x_0) \subset \Omega$ en de continuïteit van f, dat er een kleiner $r > 1$ is zodanig dat $f(D_r \times \Omega) \subset \Omega$.

□

Lemma 5.6. *Zij ϕ continu, $z_0 \in \Omega$ en neem aan dat $u(z_0) = \mathrm{EH}_1^{\phi}(z_0) < \beta$ voor een $\beta \in \mathbf{R}$. Dan bestaat er een omgeving V van z_0 in Ω, $r > 1$ en een $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r \times V, \Omega)$ met $f(0, z) = z$ en $u(z) \leq H_1^{\phi}(f(\bullet, z)) < \beta$ voor alle $z \in V$.*

Bewijs. Uit de definitie van u volgt direct dat er een $f_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r, \Omega)$ is met $f_0(0) = z_0$ en $H_1^{\phi}(f_0) < \beta$. Lemma 5.5 en de continuïteit van ϕ impliceren dat $z \mapsto H_1^{\phi}(f(\bullet, z))$ continu is. Uit $H_1^{\phi}(f(\bullet, z_0)) = H_1^{\phi}(f_0) < \beta$ volgt dan, eventueel door V te verkleinen, dat er een omgeving V van z_0 is, zodanig dat $u(z) \leq H_1^{\phi}(f(\bullet, z)) < \beta$ voor alle $z \in V$. □

Lemma 5.7. *Zij H een schijffunctionaal die van boven begrensd is op compacta en waar Lemma 5.6 voor geldt, i.e.: Als $u(z_0) = \mathrm{EH}(z_0) < \beta$ voor een $\beta \in \mathbf{R}$, dan bestaat er een omgeving V van z_0 in Ω, een $r > 1$ en een $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r \times V, \Omega)$ met $f(0,z) = z$ en $u(z) \leq H(f(\bullet, z)) < \beta$ voor alle $z \in V$.*
Stel dat $h \in \mathcal{A}_\Omega$, $\epsilon > 0$ en $W : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ continu met $W \geq u$. Dan bestaat er een $r > 1$ en $F \in C^\infty(\mathbb{D}_r \times \mathbb{T}, \Omega)$ met $F(\bullet, w) \in \mathcal{A}_\Omega$, $F(0,w) = h(w)$ voor alle $w \in \mathbb{T}$ en zodanig dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} H(F(\bullet, w))\, d\lambda(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} W \circ h \, d\lambda + \epsilon \tag{5.3}$$

geldt.

Bewijs. Zij $w_0 \in \mathbb{T}$ en $x_0 := h(w_0) \in \Omega$. Toepassen van Lemma 5.6 geeft een $r_0 > 1$, een omgeving V_0 van x_0 en een $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_{r_0} \times V_0, \Omega)$ met $f(0,x) = x$ en $H(f(\bullet, x)) < W(x) + \frac{\epsilon}{8\pi}$ op V_0. Neem een *open* boog $I_0 \subset \mathbb{T}$ die w_0 bevat en zodanig dat $h(w) \in V_0$ voor $w \in I_0$. Definieer nu $F_0 \in C^\infty(\mathbb{D}_{r_0} \times I_0, \Omega)$ door $(\zeta, w) \mapsto f(\zeta, h(w))$. Door r_0 eventueel te vervangen door een kleiner getal groter dan 1 en I_0 door een kleinere open boog die w_0 bevat, mogen we aannemen dat $F_0(\mathbb{D}_{r_0} \times I_0)$ precompact ligt in Ω.

Uit het compact zijn van $\mathbb{T}$ en het bovenstaand argument volgt dat er een eindige open overdekking van $\mathbb{T}$ door open bogen $\{I_j\}_{j=1}^N$, $r_j > 1$ en $F_j \in C^\infty(\mathbb{D}_{r_j} \times I_j, \Omega)$ zijn met $F_j(\bullet, w) \in \mathcal{A}_\Omega(h(w))$ voor $w \in I_j$ met $F_j(\mathbb{D}_{r_j} \times I_j)$ precompact in Ω en

$$H(F(\bullet, w)) < W(h(w)) + \frac{\epsilon}{8\pi} \tag{5.4a}$$

voor alle $w \in I_j$. Definieer $r = \min_j r_j$. Kies nu een compacte $M \subset \Omega$ die $\cup_j \operatorname{im}(F_j)$ bevat, en een constante

$$C > \max\left(0, \sup_{\substack{f \in \mathcal{A}_\Omega \\ f(\bar{\mathbb{D}}) \subset M}} H(f)\right) + \sup_M |W|. \tag{5.4b}$$

Er is een deelverzameling A van $\{1, 2, \cdots, N\}$ en er zijn disjuncte gesloten bogen $J_j \subset I_j$ met $j \in A$ en $\lambda(\mathbb{T} \setminus \cup_j J_j) < \frac{\epsilon}{4C}$. Door eventueel een aantal bogen I_j uit de overdekking van $\mathbb{T}$ te verwijderen mogen we aannemen dat $A = \{1, 2, \cdots, N\}$. Kies nu disjuncte open bogen K_j, $J_j \subset K_j \subset I_j$, een C^∞ functie $\varrho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbf{R}$ zodanig dat $0 \leq \varrho \leq 1$, $\varrho(w) = 1$ voor alle $w \in \cup_j J_j$ en $\varrho(w) = 0$ als $w \in \mathbb{T} \setminus \cup_j K_j$. Definieer nu $F \in C^\infty(\mathbb{D}_r \times \mathbb{T}, \Omega)$:

$$F(\zeta, w) = \begin{cases} F_j(\varrho(w)\zeta, w) & \text{als } \zeta \in \mathbb{D}_r \text{ en } w \in K_j. \\ h(w) & \text{als } \zeta \in \mathbb{D}_r,\ w \in \mathbb{T} \setminus \cup_j K_j. \end{cases}$$

Deze keuze van ϱ garandeert dat F glad en $F(\bullet, w) \in \mathcal{A}_\Omega(h(w))$ voor alle $w \in \mathbb{T}$.

De ongelijkheid (5.3) volgt uit de volgende reeks (on)gelijkheden.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} H(F(\bullet, e^{i\theta}))\ d\theta &= \int_{\cup J_j} H(F(\bullet, w))\ d\lambda(w) + \int_{\mathbb{T}\setminus\cup J_j} H(F(\bullet, w))\ d\lambda(w) \\ &\leq \int_{\cup J_j} H(F(\bullet, w))\ d\lambda(w) + \lambda(\mathbb{T}\setminus \cup J_j)\cdot C \\ &\leq \int_{\cup J_j} H(F(\bullet, w))\ d\lambda(w) + \frac{\epsilon}{4}.\end{aligned}$$

Uit (5.4a) volgt:

$$\sum_j \int_{J_j} H(F_j(\bullet, w))\ d\lambda(w) \leq \sum_j \left(\int_{J_j} \left(W\circ h + \frac{\epsilon}{8\pi}\right) d\lambda \right) \leq \sum_j \int_{J_j} W\circ h\ d\lambda + 2\pi \frac{\epsilon}{8\pi}.$$

Vanwege (5.4b):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} W\circ h\ d\lambda &= \int_{\cup J_j} W\circ h\ d\lambda + \int_{\mathbb{T}\setminus\cup J_j} W\circ h\ d\lambda \geq \sum_j \int_{J_j} W\circ h\ d\lambda - \frac{\epsilon}{4C}\cdot C \\ &\geq \sum_j \int_{J_j} W\circ h\ d\lambda - \frac{\epsilon}{4},\end{aligned}$$

en dus

$$\int_{\mathbb{T}} W\circ h\ d\lambda + \epsilon \geq \int_{\cup J_j} W\circ h\ d\lambda - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon > \int_{\cup J_j} W\circ h\ d\lambda + \frac{\epsilon}{2}.$$

□

Lemma 5.8. *Zij $r > 1$, $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r, \Omega)$ en $F \in C^\infty(\mathbb{D}_r \times \mathbb{T}, \Omega)$ met $F(\bullet, w) \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r, \Omega)$ en $F(0, w) = h(w)$ voor alle $w \in \mathbb{T}$. Dan bestaan er s en t in $(1, r)$, $j \in \mathbf{N}$ en een rij functies $F_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_s \times D_t^*, \Omega)$ zodanig dat*

(i) *$F_j \to F$ uniform op $\mathbb{D}_s \times \mathbb{T}$ voor $j \to \infty$,*

(ii) *$\exists k_j \in \mathbf{N}$, $k_j \geq j$ zodanig dat de afbeelding $(\zeta, w) \mapsto F_j(\zeta w^{k_j}, w)$ kan worden voortgezet tot een afbeelding $G_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_s \times \mathbb{D}_s, \Omega)$ met*

(iii) *$G_j(0, w) = h(w)$ voor alle $w \in \mathbb{D}_s$.*

Bewijs. Definieer $F_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r \times D_r^*, \Omega)$ als de som van h en de j-de partiële Fouriersom van $F(\zeta, \bullet) - h(\bullet)$:

$$F_j(\zeta, w) = h(w) + \sum_{k=-j}^{j} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [F(\zeta, e^{i\theta}) - h(e^{i\theta})] e^{-k\theta}\, d\theta \right) w^k.$$

Uit elementaire Fouriertheorie volgt dat voor een vast $\zeta \in \mathbb{D}_r$, de F_j uniform convergeert op $\mathbb{T}$ als $j \to \infty$, omdat $\theta \mapsto F(\zeta, e^{i\theta}) - h(e^{i\theta})$ continu is (zelfs C^∞) met periode 2π. Door partiëel te integreren en gebruik te maken van deze periodiciteit, volgt dat de integraal van boven kan worden afgeschat door

$$\frac{1}{k^2} \max_{\substack{\zeta\in\mathbb{D}_t \\ \theta\in\mathbf{R}}} \left| \frac{\partial^2 (F(\zeta, e^{i\theta}) - h(e^{i\theta}))}{\partial \theta^2} \right| \qquad (k \neq 0, \quad t \in (1, r)).$$

Uit de Weierstrass M-test volgt dan uniforme convergentie op $\mathbb{D}_t \times \mathbb{T}$ voor alle $t \in (1, r)$; hiermee is (i) aangetoond.

Voor elke $\zeta \in \mathbb{D}_r$ heeft de afbeelding $w \mapsto F_j(\zeta, w) - h(w)$ een pool in de oorsprong waarvan de orde maximaal j is. Voor elke $w \in D_r^*$ heeft de afbeelding $\zeta \mapsto F_j(\zeta, w) - h(w)$ een nulpunt in de oorsprong. De afbeelding $(\zeta, w) \mapsto F_j(\zeta w^k, w)$ kan (in te zien door bijvoorbeeld de Laurentreeks van $F(\zeta, \bullet)$ op te schrijven) worden voortgezet tot een afbeelding $G_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_s \times \mathbb{D}_s, \Omega)$ met $s \in (1, r)$. Hieruit volgen dan (ii) en (iii). $\square$

Lemma 5.9. *Zij ϕ een usc functie op Ω. Neem verder aan dat h en F voldoen aan (i),(ii) en (iii) uit Lemma 5.8. Dan bestaat er voor alle $\epsilon > 0$ een $s \in (1, r)$ en een $G \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_s \times \mathbb{D}_s, \Omega)$ met $G(0, w) = h(w)$ voor alle $w \in \mathbb{D}_s$ en zodanig dat*

$$\int_{\mathbb{T}} H_1^\phi(G(\bullet, w))\ d\lambda(w) \leq \int_{\mathbb{T}} H_1^\phi(F(\bullet, w))\ d\lambda(w) + \epsilon. \tag{5.5}$$

Bewijs. Zij F_j en G_j de rij functies die voldoen aan de *conclusie* uit Lemma 5.8. Uit de 'limsup variant' van het Lemma van Fatou en onderdeel (i) van Lemma 5.8 volgt dan voor voldoende grote j

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(F_j(e^{it}, e^{i\theta}))dtd\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(F(e^{it}, e^{i\theta}))dtd\theta + \epsilon \\ &= \int_0^{2\pi} H(F(\bullet, e^{i\theta}))\ d\theta + \epsilon. \end{aligned} \tag{5.6a}$$

Neem een j vast waar (5.7) voor geldt en zet $G = G_j$. Dan geldt $G(0, w) = h(w)$ voor alle $w \in \mathbb{D}_s$ en

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} H(G(\bullet, e^{i\theta}))\ d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(F_j(e^{i(t+k_j\theta)}, e^{i\theta}))dtd\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(F_j(e^{it}, e^{i\theta}))\, d\theta. \end{aligned} \tag{5.6b}$$

De ongelijkheid (5.5) volgt uit (5.6a) en (5.6b). $\square$

Lemma 5.10. *Stel ϕ is een usc functie op $\Omega \subset \mathbf{C}^n$. Zij $G \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_s \times \mathbb{D}_s, \Omega)$, $s > 1$ en $k \in \mathbf{N}$. Dan bestaat er een $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_s, \Omega)$ met $g(0) = G(0, 0)$, van de vorm $g(\zeta) = G(e^{i\theta_0}\zeta^k, \zeta)$ met een $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ en zodanig dat*

$$H_1^\phi(g) \leq \int_{\mathbb{T}} H_1^\phi(G(\bullet, w))\ d\lambda(w) \tag{5.7}$$

geldt.

Bewijs. Definieer $P : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ door $(t, \theta) \mapsto \phi \circ G(e^{it}, e^{i\theta})$ en de coördinatentransformatie $\chi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, gedefinieerd door $(t, \theta) \mapsto (\theta + t, kt)$. Uit $\det(J\chi) = -1$ en de kettingregel volgt dan

$$\iint_{\chi([0,2\pi]^2)} P(t, \theta) dtd\theta = \iint_{[0,2\pi]^2} P \circ \chi(t', \theta') |\det(J\chi)| dt'd\theta'.$$

Oftewel:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{[0,2\pi]^2}\phi\circ G(e^{it},e^{i\theta}))dtd\theta=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{[0,2\pi]^2}\phi\circ G(e^{i\theta'}e^{ikt'},e^{it'}))dt'd\theta'.$$

Hieruit volgt dan onmiddellijk dat er een $\theta_0\in[0,2\pi)$ is met

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{[0,2\pi]^2}\phi\circ G(e^{it},e^{i\theta}))dtd\theta\geq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi\circ G(e^{i\theta_0}e^{ikt},e^{it}))dtd\theta.$$

De ongelijkheid (5.7) volgt met $g(\zeta)=G(e^{i\theta_0}\zeta^k,\zeta)$.

$\square$

6 De Rieszfunctionaal

Stelling 6.1. *Zij v een continue psh functie op een gebied $\Omega \subset \mathbf{C}^n$. Dan geldt $u = \mathrm{EH}_2^v = v + \mathrm{EH}_1^{-v}$; u is dus psh.*

Bewijs. Uit de Riesz Representatie Formule (RRF) (zie Ransford[11, Stelling 4.5.1]) volgt

$$\begin{aligned} H_2^v(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \log|\bullet|\Delta(v\circ f) = \int_{\mathbb{D}} G(0,\bullet)\Delta(v\circ f) \\ &= v(f(0)) - \int_{\mathbb{T}} P(0,\bullet) v\circ f\, d\lambda = v(f(0)) + H_1^{-v}(f) \end{aligned} \tag{6.1}$$

voor alle $f \in \mathcal{A}_\Omega$.

Hieruit volgt dan $\mathrm{EH}_2^v = v + \mathrm{EH}_1^{-v}$. Omdat $-v$ continu is, volgt uit Stelling 5.4 dat EH_1^{-v} psh is. EH_2^v is psh omdat de som van twee psh functies psh is. □

Stelling 6.2 (Hoofdstelling voor de Rieszfunctionaal). *Zij $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ een gebied en v een continu psh functie. Dan is $u = \mathrm{EH}_2^v$ psh, en als $u \not\equiv -\infty$, dan geldt voor alle $z \in \Omega$*

$$\inf_{f\in\mathcal{A}_\Omega(z)} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \log|\bullet|\Delta(v\circ f) = \sup_{w\in\mathcal{F}_2^v} w(z),$$

met $\mathcal{F}_2^v = \{w \in \mathrm{PSH}(\Omega) : w \le 0 \text{ en } \mathcal{L}(w) \ge \mathcal{L}(v)\}$.

Bewijs.

(a) Zet $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2^v$. Bewering: $\sup\mathcal{F} \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Zonder verlies van algemeenheid: $\exists w_0 \in \mathcal{F} \setminus \{-\infty\}$. Definieer $\mathcal{F}_0 = \{w \in \mathcal{F}_v : \mathcal{L}(w) \ge \mathcal{L}(w_0)\}$. Zwakke convergentie in de topologie van $\mathrm{PSH}(\Omega)$ impliceert convergentie van Leviformen in de zin van stromen (Engels: *currents*). Dus $\mathcal{F}_0$ is rijcompact en daarom compact. Uit Lemma 5.1 volgt dan: $\sup\mathcal{F} = \sup\mathcal{F}_0 \in \mathrm{PSH}(\Omega)$.

(b) Bewering: $\sup\mathcal{F} \le u$. Neem een $w \in \mathcal{F}$ en $f \in \mathcal{A}_\Omega$. Aan te tonen: $w(f(0)) \le H_2^v$. Zonder verlies van algemeenheid: $w(f(0)) \ne -\infty$. Uit de continuïteit van v volgt $w - v \in \mathrm{PSH}^*(\Omega)$. Samen met de RRF en $\Delta(w\circ f) \ge \Delta(v\circ f)$ krijgen we:

$$\begin{aligned} w(f(0)) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \log|\bullet|\Delta(w\circ f) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} w\circ f\, d\lambda \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \log|\bullet|\Delta(w\circ f) \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \log|\bullet|\Delta(v\circ f) = H_2^v(f) \end{aligned}$$

Neem nu voor een vaste $z \in \Omega$ het supremum over alle $w \in \mathcal{F}$ en het infinimum over alle $f \in \mathcal{A}_\Omega(z)$: $\sup\mathcal{F} \le u$.

(c) Bewering: $\sup\mathcal{F} \ge u$. Omdat v continu en u usc is: $s = u - v$ is usc. Uit (6.1) en Lemma 6.6 volgt:

$$\begin{aligned} s(f(0)) &= u(f(0)) - v(f(0)) \\ &\le H_2^v(f) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u\circ f\, d\lambda - H_2^v - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} v\circ f\, d\lambda \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} s\circ f\, d\lambda, \end{aligned}$$

oftewel, s voldoet aan de submiddelwaarde eigenschap op complexe lijnen. Nu is s ook usc en daarom dus psh. Stel dat u niet identiek $-\infty$ is. Uit $\mathcal{L}(u)-\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(u-v) = \mathcal{L}(s) \geq 0$ volgt dan: $u \in \mathcal{F}$.

Uit (b) en (c) volgt: $u = \mathrm{EH}_2^v = \sup \mathcal{F}$ als $u \not\equiv -\infty$. □

Lemma 6.3. *Zij v continu. Dan geldt Lemma 5.6 ook voor de Rieszfunctionaal H_2^v.*

Bewijs. Uit formule 6.1 en Lemma 5.6, toegepast op $\phi = -v$ en β vervangen door $\beta' - v(z_0)$ met $u(z_0) < \beta' < \beta$, volgt dat er een omgeving V van x_0 en een $f \in \mathcal{O}(D_r \times V)$ is, met een $r > 1$ zodanig dat

$$H_2^v(f(\bullet, z)) = v(f(0,z)) + H_1^{-v}(f(\bullet, z)) < v(z) + \beta' - v(z_0).$$

Wegens de continuïteit van v kunnen we ervoor zorgen, eventueel door V te verkleinen, dat $v(x) - v(x_0) < \beta - \beta'$ geldt op V en dus ook

$$H_2^v(f(\bullet, z)) < \beta' + (\beta - \beta') = \beta$$

voor alle $z \in V$. □

Lemma 6.4. *Zij v continu. Dan geldt Lemma 5.9 ook voor de Rieszfunctionaal H_2^v.*

Bewijs. Uit Lemma 5.8 en formule (6.1) volgt voor voldoende grote j

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} H_2^v(F_j(\bullet, w))\ d\lambda(w) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} H_2^v(F(\bullet, w))\ d\lambda(w) + \epsilon.$$

Kies nu $G = G_j$ met j groot genoeg zodat bovenstaande ongelijkheid geldt. □

Lemma 6.5. *Zij v continu. Stel dat $h \in \mathcal{A}_\Omega$, $s > 1$, $G \in \mathcal{O}(D_s \times D_s, \Omega)$ met $G(0,w) = h(w)$ voor alle $w \in D_s$. Dan bestaat er een $g \in \mathcal{O}(D_s, \Omega)$ met $g(0) = G(0,0)$ en*

$$H_2^v(g) \leq H_2^v(h) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} H_2^v(G(\bullet, w))\ d\lambda(w). \tag{6.2}$$

Bewijs. Door gebruik te maken van dezelfde coördinatentransformatie als in Lemma 5.9, volgt uit de kettingregel dat voor de RHZ van (6.2)

$$\begin{aligned} &v(h(0)) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(h(e^{i\theta}))d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(v(G(0,e^{i\theta})) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(G(e^{it}, e^{i\theta}))dt\right)d\theta \\ &= v(G(0,0)) - \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} v(G(e^{i\theta}e^{it}, e^{it}))dtd\theta \end{aligned}$$

geldt. Er volgt dan onmiddellijk dat er een θ_0 is met de gevraagde eigenschappen wanneer we g definiëren als $g(\zeta) = G(e^{i\theta_0}\zeta, \zeta)$. □

Lemma 6.6. *Zij v een continue psh functie op een gebied Ω in $\mathbf{C}^n$. Dan geldt*

$$\mathrm{EH}_2^v(h(0)) \leq H_2^v(h) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{EH}_2^v \circ h\, d\lambda \tag{6.3}$$

voor alle $h \in \mathcal{A}_\Omega$.

Bewijs. Net als in onderdeel (d) van het bewijs van de Hoofdstelling voor de Poissonfunctionaal, is het voldoende om aan te tonen dat er voor alle $\epsilon > 0$ en continue $W \geq u$, een $g \in \mathcal{A}_\Omega$ is met $g(0) = h(0)$ en

$$H_2^v(g) \leq H_2^v(h) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} W \circ h \, d\lambda.$$

Dit volgt uit de Lemmas 5.7, 6.4 en 6.5. Lemma 5.7 is van toepassing omdat Lemma 5.6 van toepassing is op H_2^v en de Rieszfunctionaal van boven begrensd is op compacta. □

7 De Lelongfunctionaal

Definitie-Lemma 7.1. *Zij* $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, $f \in \mathcal{A}_\Omega$ *en* $b \in \mathbb{D}$. *Dan geldt*

$$\nu_{u\circ f}(b) \geq \nu_u(f(b))m_b(f). \tag{7.1a}$$

Voor een niet-negatieve functie α *op* Ω *definiëren we een nieuwe niet-negatieve functie*

$$(f^*\alpha)(b) = \alpha(f(b))m_b(f) \tag{7.1b}$$

en v_f^α *als de grootste niet-positieve subharmonische functie op* $\mathbb{D}$ *met Lelonggetal minstens gelijk aan* $f^*\alpha$, *oftewel*

$$v_f^\alpha(\zeta) = \sum_{b\in\mathbb{D}} \alpha(f(b))m_b(f)\log\left|\frac{\zeta - b}{1-\bar{b}\zeta}\right|. \tag{7.1c}$$

Tevens geldt: $H_3^\alpha(f) = v_f^\alpha(0)$.

Propositie 7.2. *Zij* α *een niet-negatieve functie op een gebied* Ω *in* $\mathbf{C}^n$ *en* $\mathcal{F}_3^\alpha = \{w \in \mathrm{PSH}(\Omega) : w \leq 0,\ \nu_w \geq \alpha\}$. *Dan is* $\sup \mathcal{F}_3^\alpha$ *plurisubharmonisch. Voor een* $w \in \mathcal{F}_3^\alpha$ *en* $f \in \mathcal{A}_\Omega$ *geldt* $w(f(0)) \leq H_3^\alpha$*; daarom:* $\sup\mathcal{F}_3^\alpha \leq \mathrm{EH}_3^\alpha$. *Verder is* EH_3^α *psh desda* $\mathrm{EH}_3^\alpha \in \mathcal{F}_3^\alpha$ *en dan geldt tevens* $\mathrm{EH}_3^\alpha = \sup\mathcal{F}_3^\alpha$.

Bewijs. Zonder verlies van algemeenheid: $\exists w_0 \in \mathcal{F}_3^\alpha \setminus \{-\infty\}$. Beschouw net als in Stelling 5.3 $\mathcal{F}_0 = \{w \in \mathcal{F}_3^\alpha : w \geq w_0\}$. We beweren dat $\mathcal{F}_0$ rijcompact is. Stel dat $\{w_i\}$ een rij functies is in $\mathcal{F}_0$. Omdat de $w_i's$ lokaal uniform van beneden begrensd zijn, is er een deelrij w_{i_k} die naar een $\mathrm{PSH}^*(\Omega)$ convergeert in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; zie Hörmander[4, Stelling 3.2.12]). Voor een vaste $p \in \Omega$, is de afbeelding $\Lambda : \mathrm{PSH}^*(\Omega) \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ gedefinieerd door $u \mapsto \nu_u(p)$ usc en daarom:

$$\alpha(p) \leq \limsup_{k\to\infty} \Lambda_p(w_{i_k}) \leq \Lambda_p(w) = \nu_w(p).$$

Dus: $w \in \mathcal{F}_0$. De bewering is hiermee bewezen en uit Lemma 5.1 en 5.2 volgt $\sup\mathcal{F}_3^\alpha = \sup\mathcal{F}_0 \in \mathrm{PSH}(\Omega)$.

Stel nu dat $w \in \mathcal{F}_3^\alpha$ en $f \in \mathcal{A}_\Omega$. Uit (7.1a) volgt $\nu_{w\circ f} \geq f^*\nu_w \geq f^*\alpha$. De maximaliteit van v_f^α impliceert $w \circ f \leq v_f^\alpha$. Daarom: $w(f(0)) \leq v_f^\alpha(0) = H_3^\alpha(f)$. Stel nu dat EH_3^α psh is. Kies een $p \in \Omega$ vast. Neem een $r > 0$ zodanig dat $U_r = D_{2r}^n(p) \subset \Omega$ en definieer voor alle z met $0 < |z-p| < r$ een $f_z \in \mathcal{A}_\Omega$, gedefinieerd door $\zeta \mapsto z + r\zeta\frac{z-p}{|z-p|}$. Dan geldt $f_z(0) = z$ en $f(-\frac{|z-p|}{r}) = p$. Daarom geldt

$$\begin{aligned}\mathrm{EH}_3^\alpha(z) \leq H_3^\alpha(f) &= \sum_{\zeta\in\mathbb{D}} \alpha(f(\zeta))m_\zeta(f)\log|\zeta| \\ &\leq \alpha(f(-\frac{|z-p|}{r}))m_{-\frac{|z-p|}{r}}\log|\frac{z-p}{r}| \leq \alpha(p)\log|\frac{z-p}{r}|,\end{aligned}$$

en dus

$$\lim_{s\downarrow 0}\frac{\sup_{|z-p|=s} u(z)}{\log s} \geq \lim_{s\downarrow 0}\alpha(p)\frac{\log|\frac{s}{r}|}{\log s} = \alpha(p)$$

Oftewel: $\nu_{\mathrm{EH}_3^\alpha}(p) \geq \alpha(p)$. ∎

Definitie-Propositie 7.3.

(i) *Voor een niet-negatieve functie α definiëren we de functie $k_\Omega^\alpha : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ als*

$$\begin{aligned} k_\Omega^\alpha(z) &= \inf_{\substack{f\in\mathcal{A}_\Omega(z)\\ \zeta\in\mathbb{D}^*}} \alpha(f(\zeta))\log|\zeta| \\ &= \inf_{\substack{f\in\mathcal{A}_\Omega(z)\\ t\in(0,1)}} \alpha(f(t))\log t = \inf_{a\in\Omega}\alpha(a)\log\tanh\delta_\Omega(z,a) \end{aligned} \tag{7.2a}$$

waarin $\delta_\Omega(z,a)$ de pseudoafstand

$$\delta_\Omega(z,a) = \inf_{\substack{f(\zeta)=z, f(w)=a\\ f\in\mathcal{O}(\mathbb{D},\Omega)}} \varrho_{\mathbb{D}}(\zeta,w) \quad \textit{is en } \varrho_{\mathbb{D}}(\zeta,w) = \tanh^{-1}\frac{\zeta - w}{1-\bar{w}\zeta}$$

de Poincaréafstand in $\mathbb{D}$.

(ii) *k_Ω^α is een niet-positieve usc functie, en voor alle $p\in\Omega$ bestaat er een omgeving $U_r = D_r^n(p)$ van p in Ω zodanig dat*

$$k_\Omega^\alpha(z) \le \alpha(p)\log\left|\frac{z-p}{r}\right| \quad \textit{voor alle } z\in U_r. \tag{7.2b}$$

Bewijs.

(i) De laatste gelijkheid van (7.2a) volgt door de compositie van f in de definitie van δ_Ω te nemen met een automorfisme van $\mathbb{D}$, welke 0 naar ζ stuurt en daarna deze afbeelding te vervangen door $\zeta \mapsto f(\zeta/r)$ met $r > 1$ dichtbij 1; vermenigvuldig met $\alpha(a)$ en neem het infinimum over alle $a \in \Omega$.

(ii) $k_\Omega^\alpha \le 0$ is triviaal. Neem een $z_0\in\Omega$ en $\beta\in\mathbf{R}$ met $k_\Omega^\alpha(z_0) < \beta$. Uit de definitie van k_Ω^α volgt dat er $f_0 \in \mathcal{A}_\Omega(z_0)$ en $t_0\in(0,1)$ zijn met $\alpha(f(t_0))\log t_0 < \beta$. Uit Lemma 5.5 volgt dat er een omgeving V van z_0, een $r>1$ en een $f\in\mathcal{O}(\mathbb{D}_r\times V,\Omega)$ zijn, zodanig dat $f(\bullet,\alpha) = f_0$, $f(0,z) = z$ en $f(t_0,z) = f_0(t_0)$. Er geldt tevens

$$k_\Omega^\alpha \le \alpha(f(t_0,z))\log t_0 < \beta \quad \text{voor alle } z\in V.$$

Aangezien β willekeurig gekozen was, volgt dat k_Ω^α usc is.

Neem nu f als in Propositie 7.2: $f(0) = z$, $f(-|z-p|/r) = p$. Dan geldt voor $z\in U_r$: $k_\Omega^\alpha \le \alpha(f(-|z-p|/r)\log(|z-p|/r)$ en (7.2b) volgt.

□

Stelling 7.4 (Hoofdstelling voor de Lelongfunctionaal). *Zij α een niet-positieve functie op een gebied Ω in $\mathbf{C}^n$ en definieer k_Ω^α als in (7.2a). Dan is $u = \mathrm{EH}_3^\alpha$ psh en geldt tevens $\sup\mathcal{F}_3^\alpha = u = \mathrm{EH}_1^{k_\Omega^\alpha}$. Oftewel, voor alle z in Ω geldt:*

$$\sup_{w\in\mathcal{F}_3^\alpha} w(z) = u(z) = \inf_{f\in\mathcal{A}_\Omega(z)} \sum_{\zeta\in\mathbb{D}} \alpha(f(\zeta))\log|\zeta| = \inf_{f\in\mathcal{A}_\Omega(z)} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_\Omega^\alpha\circ f\, d\lambda, \tag{7.3}$$

waarbij $\mathcal{F}_3^\alpha = \{w\in\mathrm{PSH}(\Omega) :\ w\le 0 \text{ en } \nu_w \ge \alpha\}$.

Schets van het bewijs.

(i) De eerste gelijkheid in (7.3) volgt uit Propositie 7.2 als we kunnen aantonen dat u psh is. Uit de usc zijn van k_Ω^α, uit $\mathrm{EH}_1^{k_\Omega^\alpha} \leq k_\Omega^\alpha$, uit Poissonfunctionaal en uit (7.2b) volgt: $\mathrm{EH}_1^{k_\Omega^\alpha} \in \mathcal{F}_1^{k_\Omega^\alpha}$. Propositie 7.2 toont tevens: $\mathrm{EH}_1^{k_\Omega^\alpha} \leq \mathrm{EH}_3^\alpha$.

(ii) Omdat k_Ω^α usc is, volgt $\mathrm{EH}_1^{k_\Omega^\alpha} \geq \mathrm{EH}_3^\alpha$ wanneer we kunnen aantonen dat, voor alle $h \in \mathcal{A}_\Omega$, $\epsilon > 0$ en continu $W : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ met $W \geq k_\Omega^\alpha$, er een $g \in \mathcal{A}_\Omega$ is met $g(0) = h(0)$ en

$$H_3^\alpha(g) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} W \circ f \, d\lambda + \epsilon \tag{7.4a}$$

De constructie van g gaat op een vergelijkbaar manier als die in hoofdstuk 6. In Lárusson en Sigurdsson [7] wordt het geconstrueerd via een keten van lemma's. Omdat er voor het speciale geval van een gebied in $\mathbf{C}^n$ geen wezenlijke vereenvoudiging mogelijk bleek (tenminste niet door mij) volsta ik hier met het geven van de ingrediënten van het bewijs:

- $\exists F \in C^\infty(\mathbb{D}_r \times \mathbb{T}, \Omega)$ en een eindig aantal functies $\sigma_\nu \in C^\infty(\mathbb{T})$ zodanig dat $F(0, w) = h(w)$ voor alle $w \in \mathbb{T}$, $F(\sigma_\nu(w), w) = a_\nu$ voor w op een zekere boog J_ν en zodanig dat

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha(a_\nu) \int_{\mathbb{T}} \log|\sigma_\nu| d\lambda \leq \int_{\mathbb{T}} W \circ h \, d\lambda \; + \epsilon. \tag{7.4b}$$

  Dit is Lemma 5.4 in Lárusson en Sigurdsson [7]. Het bewijs gebruikt geen andere ingrediënten dan ons Lemma 5.7.

- Voor een $t \in (1, r)$ bestaan er $G \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_t \times \mathbb{D}_t, \Omega)$ en $\tau_\nu \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_t \setminus \bar{\mathbb{D}}_{1/t})$ zodanig dat $G(0, w) = h(w)$ voor alle $w \in \mathbb{D}_t$ en $G(\tau_\nu(w), w) = a_\nu$. Voor alle $w \in J_\nu$ geldt tevens

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha(a_\nu) \int_{\mathbb{T}} \log|\tau_\nu| d\lambda \leq \sum_{\nu=1}^{N} \alpha(a_\nu) \int_{\mathbb{T}} \log|\sigma_\nu| d\lambda \; + \epsilon \tag{7.4c}$$

  Dit is Lemma 5.6 in Lárusson en Sigurdsson [7]. Het bewijs gaat deels volgens ons Lemma 5.8, maar gebruikt daarnaast de interpolatieformule van Lagrange en het Blaschkeproduct wezenlijk.

- Er bestaan $\xi \in \mathbb{T}$, $k \in \mathbf{N}$, $c > 0$ en $\rho \in (0, 1)$ zodanig dat voor $f \in \mathcal{A}_\Omega$ en $\Phi \in \mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}} \times \bar{\mathbb{D}})$, gedefinieerd door de formules

$$g(z) = G(\xi\zeta^k, \zeta) \quad \text{en} \quad \Phi(\zeta, w) = \frac{w\rho\zeta + e^{-c/k}}{1 + e^{-c/k}\rho\zeta}, \tag{7.4d}$$

  geldt

$$\int_0^{2\pi} H_3^\alpha(f \circ \Phi(\bullet, e^{i\theta})) \; d\theta \leq \sum_{\nu=1}^{N} \alpha(a_\nu) \int_{\mathbb{T}} \log|\tau_\nu| d\lambda \; + \epsilon. \tag{7.4e}$$

Dit is Lemma 5.7 in Lárusson en Sigurdsson [7]. De belangrijkste ingrediënten van het bewijs zijn de stellingen van Frostman en Hurwitz en Lemma 3.2 in Poletsky[10].

- Wanneer $v_f^\alpha \not\equiv -\infty$, zijn we klaar: zet $g = f$. Anders hebben we een $g \in \mathcal{A}_\Omega$ van de vorm

$$g(\zeta) = f \circ \Phi(e^{i\theta_0 \zeta}, \zeta) \quad \text{en zodanig dat} \quad H_3^\alpha(g) \leq \int_0^{2\pi} H_3^\alpha(f \circ \Phi(\bullet, e^{i\theta}))\, d\theta. \tag{7.4f}$$

Dit is Lemma 5.8 in Lárusson en Sigurdsson [7].

(iii) Door de ongelijkheden (7.4b),(7.4c), (7.4e) en (7.4f) te combineren, volgt (7.4a).

□

8 Toepassingen van de Poissonfunctionaal

8.1 Polynomiale convexiteit

Definitie 8.1. Zij $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ een gebied en $\mathcal{F}$ een familie van reëelwaardige functies op Ω. Voor een $Y \subset \Omega$ wordt het ***convexe omhulsel*** van Y met respect tot $\mathcal{F}$, notatie: $\tilde{Y}_{\mathcal{F}}$, gedefinieerd als

$$\tilde{Y}_{\mathcal{F}} = \{z \in \Omega : \ f(z) \leq \sup_Y f \quad \text{voor alle } f \in \mathcal{F}\}.$$

Als de familie $\mathcal{F}$ uit complexwaardige functies bestaat, vervangen f in bovenstaand definitie door $|f|$. Ω wordt ***convex*** genoemd met respect tot $\mathcal{F}$ als: $X \Subset \Omega \implies \tilde{X}_{\mathcal{F}} \Subset \Omega$. Als $\mathcal{F} = \mathcal{O}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{F} = \mathrm{PSH}(\Omega)$), dan wordt $\tilde{X}_{\mathcal{F}}$ het ***holomorf convexe omhulsel*** (resp. ***plurisubharmonisch convexe omhulsel***) genoemd. Ω wordt ***holomorf*** (resp. ***plurisubharmonisch***) convex genoemd als Ω convex is met respect tot $\mathcal{O}(\Omega)$ (resp. $\mathrm{PSH}(\Omega)$). Een gebied van holomorfie $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ wordt ***Runge*** genoemd als de polynomen in $z_1, z_2, \cdots, z_n$ dicht liggen in $\mathcal{O}(\Omega)$.

Voorbeeld 8.2. $\mathcal{F}$={reëelwaardige R-lineaire functies op Ω}. $\tilde{X}_{\mathcal{F}}$ is de convexe omhulsel: de maximale convexe verzameling dat X bevat. Zie: Hörmander[4, Stelling 2.1.5].

Voorbeeld 8.3. $\mathcal{F}$={polynomen op Ω}. $\tilde{X}_{\mathcal{F}}$ is de polynomiaal convexe omhulsel $\widehat{X}$.

In de volgende stelling vatten we enkele belangrijke resultaten uit complexe analyse van meer variabelen samen. Voor bewijzen wordt de lezer verwezen naar Krantz[6] en Hörmander[3].

Stelling 8.1. *Voor een gebied Ω in $\mathbf{C}^n$ zijn de begrippen pseudoconvex, gebied van holomorfie en convex met respect tot $\mathcal{O}(\Omega)$ equivalent. Een gebied Ω is Runge desda $\widehat{X} = \tilde{X}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ voor alle compacte X. Voor gebieden van holomorfie geldt voor alle compacte X: $\tilde{X}_{\mathcal{O}(\Omega)} = \tilde{X}_{\mathrm{PSH}(\Omega)}$. In het bijzonder geldt in een Runge gebied voor alle compacte X: $\widehat{X} = \tilde{X}_{\mathcal{O}(\Omega)} = \tilde{X}_{\mathrm{PSH}(\Omega)} \Subset \Omega$.*

Definitie 8.4. Zij Ω een gebied in $\mathbf{C}^n$ en $F \subset \Omega$. Definieer

$$\mathcal{U}(F,\Omega) = \{w \in \mathrm{PSH}(\Omega) : \ w \leq -\chi_F\} = \{w \in \mathrm{PSH}(\Omega) : \ w \leq 0 \text{ op } \Omega \text{ en } w \leq -1 \text{ op } F\}.$$

Definieer voor alle z in Ω:

$$\omega(z,F,\Omega) = \sup_{w \in \mathcal{U}(F,\Omega)} w(z).$$

De regularisatie $\omega^*(z,F,\Omega)$ van $\omega(z,F,\Omega)$ wordt de ***pluriharmonische maat*** van F genoemd met respect tot Ω. Een verzameling $F \subset \Omega$ heet *pluripolair* in Ω als $F \subset u^{-1}(-\infty)$ voor een $u \in \mathrm{PSH}^*(\Omega)$. Een punt $z \in F$ heet *pluriregulier* in Ω als $\omega^*(z,F,\Omega) = -1$. F heet *pluriregulier* als alle punten van F pluriregulier zijn: $\omega(\bullet,F,\Omega) \equiv -1$ op F.

Voorbeeld 8.5. Aangezien de begrensde subharmonische functies op $\mathbf{C}^n$ precies de constante functies zijn, geldt: $\omega(\bullet,F,\mathbf{C}^n) \equiv -1$ voor $F \neq \emptyset$.

Voorbeeld 8.6. In het volgende lemma (onderdeel (d)) zullen we bewijzen dat alle open verzamelingen pluriregulier zijn. Tevens zal bewezen (onderdeel (c)) worden dat alle pluripolaire verzamelingen in een begrensde gebied $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ niet-pluriregulier zijn. In het bijzonder zijn dus de nulpuntsverzamelingen van niet-constante holomorfe functies niet-pluriregulier. Voor een willekeurige gebied Ω in $\mathbf{C}^n$ volgt uit het bewijs tevens dat F niet-pluriregulier is indien $F \subset u^{-1}(-\infty)$ met u begrensd.

Lemma 8.2. *Zij Ω een gebied in $\mathbf{C}^n$. Het volgende geldt dan:*

(a) *Monotony: $\omega(\bullet, E_1, \Omega) \geq \omega(\bullet, E_2, \Omega)$ als $E_1 \subset E_2$.*

(b) $-1 \leq \omega(\bullet, F, \Omega) \leq 0$ *op* Ω *en* $\omega(\bullet, F, \Omega) \equiv -1$ *op* F.

(c) $\omega^*(\bullet, F, \Omega) \equiv 0 \implies F$ *is pluripolair. Als Ω een begrensd gebied in $\mathbf{C}^n$ is, dan geldt ook het omgekeerde: F is pluripolair $\implies \omega^*(\bullet, F, \Omega) \equiv 0$.*

(d) *Voor open F geldt $\omega(\bullet, F, \Omega) = H_1^{-\chi_F}$. Dus ω is psh en er geldt daarom $\omega = \omega^*$.*

(e) $\omega(z, F, \Omega) = \sup\{\omega(z, E, \Omega) : E \supset F \text{ open}\}$.

(f) *Voor pluriregulier $F \subset \Omega$ geldt $\omega(\bullet, F, \Omega) = \omega^*(\bullet, F, \Omega)$; ω is dus psh.*

Bewijs.

(a) Triviaal.

(b) Omdat: $-1 \in \mathcal{U}(F, \Omega)$.

(c) "$\Leftarrow$": $\exists u \in \mathrm{PSH}^*(\Omega)$ zodanig dat $F \subset u^{-1}(-\infty)$. We beweren dat we u niet-positief kunnen kiezen. Uit Josefson's resultaat (de oplossing van het Eerste Probleem van Lelong door Josefson; zie [13, Sectie 2.3].) volgt: zonder verlies van algemeenheid: $u \in \mathrm{PSH}^*(\mathbf{C}^n)$. Daar $\bar{\Omega}$ compact is, heeft u een maximum op $\bar{\Omega}$. Vervang u door u minus deze maximum.
Onmiddellijk: $\varepsilon u \in \mathcal{U}(F, \Omega)$ voor alle $\varepsilon > 0$. Daarom: $\omega(z, F, \Omega) = 0$ op $\{z \in \Omega : u(z) > -\infty\}$, i.e. bijna overal op Ω. Daarom: $\omega^*(\bullet, F, \Omega) \equiv 0$ op Ω.

"$\Rightarrow$": $\omega^*(\bullet, F, \Omega) = 0$ op Ω. Kies een $z^0 \in \Omega$. Uit de definitie van regularisatie volgt: $\exists z_j \in \Omega, z_j \to z^0$ zodanig dat $\omega(z_j, F, \Omega) \to 0$ voor $j \to \infty$. Uit $\omega(\bullet, F, \Omega) \leq 0$ en de submiddelwaarde eigenschap volgt

$$\omega(z_j, F, G) \leq \frac{1}{V_{2n} r^{2n}} \int_{B(z_j, r)} \omega(\bullet, F, \Omega)\, dV \leq 0$$

voor alle j. Neem nu de limiet $j \to \infty$: $\omega(\bullet, F, \Omega) = 0$ bijna overal in een omgeving $B(z^0, r)$ van z^0. Zet een $z' \in \Omega$ vast met $\omega(z', F, \Omega) = 0$ en neem $u_j \in \mathcal{U}(F, \Omega)$ met de eigenschap $u_j(z') \geq -2^j$. De som $u = \sum_j u_j$ is psh op Ω en $u(z') \geq -1$. Uit de constructie volgt ook: $u = -\infty$ op F.

(d) Dit volgt uit de Hoofdstelling voor de Poissonfunctionaal, toegepast op de usc functie $\phi = -\chi_F$:

$$\mathrm{EH}_1^{\phi}(z) = \inf_{f \in \mathcal{A}_\Omega(z)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} -\chi_F \circ f \, d\lambda = \sup_{v \in \mathcal{U}(F, \Omega)} v(z) = \omega(z, F, \Omega).$$

(e) "$\geq$": volgt uit (a).

"$\leq$": Zet een z_0 vast. Per definitie: alle $\varepsilon > 0$ bestaat er een $u \in \mathcal{U}(F, \Omega)$ zodanig dat $\omega(z_0, F, \Omega) < u(z_0) + \varepsilon$. Beschouw $E = \{z \in \Omega : u(z) < -1 + \varepsilon\} \supset F$.

Ook: $\omega(z, E, \Omega) \geq u(z)/(1 - \varepsilon)$ voor alle $z \in \Omega$. Daarom:

$$\omega(z_0, E, \Omega) \geq \frac{u(z_0)}{1 - \varepsilon} \geq \frac{\omega(z_0, F, \Omega) - \varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Neem de limiet $\varepsilon \downarrow 0$: $\omega(z_0, F, \Omega) \leq \sup_{H \supset F \text{ open}} \omega(z_0, H, \Omega)$.

(f) Definieer voor (voldoende kleine) $\varepsilon > 0$: $F_\varepsilon = \{z \in \Omega : \omega^*(z, F, \Omega) < -1 + \varepsilon\}$, een open omgeving van F. Dan geldt: $\omega(\bullet, F, \Omega) = (1 - \epsilon)\omega(\bullet, F_\varepsilon, \Omega)$ op $\Omega \setminus F_\varepsilon$. Neem eerst de regularisatie en gebruik daarna (d): $\omega(\bullet, F, \Omega) = (1 - \varepsilon)\omega^*(\bullet, F, \Omega)$ op $\Omega \setminus F_\varepsilon$.

Door de limiet $\varepsilon \downarrow 0$ te nemen en (e) volgt:

$$\omega^*(\bullet, F, \Omega) \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \omega(\bullet, F_\varepsilon, \Omega) = \omega(\bullet, F, \Omega) \quad \text{op } \Omega \setminus F.$$

Samen met $\omega(\bullet, F, \Omega) \leq \omega^*(\bullet, F, \Omega)$ op Ω volgt: $\omega^*(\bullet, F, \Omega) = \omega(\bullet, F, \Omega)$ op $\Omega \setminus F$. De gelijkheid geldt op heel Ω omdat F pluriregulier is.

□

Stelling 8.3. *Zij Ω een begrensd Runge gebied en $X \subset \Omega$ compact. Dan zijn equivalent:*

(i) $z_0 \in \widehat{X}$

(ii) *Voor elke open $E \supset X$ geldt er $\omega(z_0, E, \Omega) = -1$.*

Voor een Runge gebied Ω geldt dus: $\widehat{X} = \{z \in \Omega : \omega(z, X, \Omega) = -1\}$.

Bewijs.
(i) $\Longrightarrow$ (ii).[10] Stelling 8.1 vertelt ons dat $\widehat{X}$ gelijk is aan $\tilde{X}_{\mathrm{PSH}(\Omega)}$. Uit $z_0 \in \tilde{X}_{\mathrm{PSH}(\Omega)}$ en onderdelen (a) en (e) van Lemma 8.2 volgt

$$-1 \leq \omega(z_0, E, \Omega) \leq \sup_X \omega(\bullet, E, \Omega) = -1.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Zij nu p een polynoom. Neem een $\epsilon > 0$. Beschouw de open verzameling

$$E = \{z \in \Omega : |p(z)| \leq \sup_X |p| + \epsilon\} \supset X.$$

Uit $\omega(z_0, E, \Omega) = -1$ volgt dat er $f \in \mathcal{A}_\Omega(z_0)$ is met $H_1^{(-\chi_E)}(f) \leq -1 + \epsilon$, oftewel

$$\lambda(\{w \in \mathbb{T} : f(w) \in E\} \geq \int_{\mathbb{T}} \chi_E \geq 2\pi(1 - \epsilon).$$

[10]In Poletsky[10] wordt een heel ander bewijs dan hier gegeven. Hij maakt gebruik van een resultaat van Bremermann over approximatie van continu psh functies door functies van de vorm $\max\{\alpha_1 \log|f_1|, \alpha_2 \log|f_2|, \ldots, \alpha_M \log|f_M|\}$ met $\alpha_i > 0$ en f_i holomorf.

Samen met de definitie van E krijgen we de volgende afschatting voor $|p(z_0)|$:

$$|p(z_0)| = |p \circ f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p \circ f(e^{i\theta})| d\theta$$
$$(1-\epsilon)(\sup_X |p| + \epsilon) + \epsilon \cdot M,$$

met $M = \|p\|_\Omega < \infty$, omdat Ω begrensd is. Laat $\epsilon > 0$ nu naar nul gaan: $|p(z_0)| \leq \sup_X |P|$. Aangezien p willekeurig gekozen was: $z_0 \in \widehat{X}$. □

Definitie 8.7. Voor een $f \in \mathcal{A}_\Omega$ en $F \subset \Omega$ definiëren we

$$F(f) = \{w \in \mathbb{T} : f(w) \in F\} \quad \text{en} \quad \mu(F, f) = -\frac{\lambda(F(f))}{2\pi}. \tag{8.1a}$$

Tevens definiëren we

$$\Omega(z, F, \Omega) = \inf_{f \in \mathcal{A}_\Omega(z)} \mu(F, f) = \inf_{f \in \mathcal{A}_\Omega(z)} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} -\chi_F \circ f \, d\lambda. \tag{8.1b}$$

Opmerking. Ω heeft twee betekenissen vanaf nu.

Lemma 8.4. *Voor open F geldt $\Omega(z, F, \Omega) = \omega(z, F, \Omega)$. In het algemeen geldt: $\Omega(z, F, \Omega) \geq \omega(z, F, \Omega)$.*

Bewijs. Voor algemene F geldt

$$\begin{aligned}\omega(z, F, \Omega) = \sup_{E \supset F \text{ open}} \omega(z, E, \Omega) &= \sup_E \inf_{f \in \mathcal{A}_\Omega(z)} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} -\chi_E \circ f \, d\lambda \\ &\leq \sup_E \inf_{f \in \mathcal{A}_\Omega(z)} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} -\chi_F \circ f \, d\lambda = \sup_E \inf_{f \in \mathcal{A}_\Omega(z)} \mu(F, f) = \Omega(z, F, \Omega),\end{aligned} \tag{8.2}$$

waarbij we "$\leq$" veranderen in een "$=$" wanneer F open is. □

Stelling 8.5. *Zij Ω een begrensd gebied in $\mathbf{C}^n$ en F een pluriregulier verzameling in Ω (i.e. $\omega(\bullet, F, \Omega) \equiv -1$ op F). Dan geldt $\omega(\bullet, F, \Omega) \geq \Omega(\bullet, \bar{F}, \Omega)$.*

In het bijzonder, wanneer X een plurireguliere compacte verzameling is, dan

$$\omega(\bullet, X, \Omega) = \Omega(\bullet, X, \Omega).$$

Gevolg 8.6. *Zij X een pluriregulier compacte verzameling in $\mathbf{C}^n$. Dan $z_0 \in \widehat{X}$ desda voor alle $\epsilon > 0$ er een holomorfe afbeelding $f : \bar{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbf{C}^n$ met $f(0) = z_0$ bestaat met $\mu(X, f) \leq -1 + \epsilon$, i.e. $\lambda(\{w \in \mathbb{T} : f(w) \in X\}) > 2\pi(1-\epsilon)$.*

Opmerking 8.8. Stelling 8.5 en Gevolg 8.6 zijn niet waar voor willekeurige compacte verzamelingen $X \subset \Omega$. Sibony heeft een compacte pluripolaire X geconstrueerd, waar het bijvoorbeeld niet voor geldt: $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 = \{(\zeta, e^{i\theta}, 0) \in \mathbf{C}^3 : |\zeta| = 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ en $X_2 = \{(\zeta, e^{i\theta}, \zeta) \in \mathbf{C}^3 : |\zeta| = \sqrt{2}/2, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Dit volgt uit het volgende.

- $0 \in \hat{X}$. Dit volgt door de maximum modules principe twee maal toe te passen:

$$\begin{aligned}|p(0,0,0)| &\leq \sup_{|w|=1} |p(0,w,0)| \\ &\leq \max\left(\sup_{|w|=1,\ \mathrm{Im}(w)\geq 0}\ \sup_{|\zeta|=1} |p(\zeta,w,0)|, \sup_{|w|=1,\ \mathrm{Im}(w)\leq 0}\ \sup_{|\zeta|=\sqrt{2}/2} |p(\zeta,w,\zeta)| \right) \\ &\leq \max_X |p|.\end{aligned}$$

- X is pluripolair: X zit in de nulpuntsverzameling van de niet-constante holomorfe functie $z \mapsto z_3(z_1 - z_3)$.

- Zij $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{A}_\Omega(0)$. Beschouw $A_i = \{\zeta \in \mathbb{T} : f(\zeta) \in X_i\}$, $i = 1, 2$, $A = A_1 \cup A_2$, $\Gamma_1 = \{\zeta \in \mathbb{T} : \mathrm{Im}(\zeta) \geq 0\}$, $\Gamma_2 = \{\zeta \in \mathbb{T} : \mathrm{Im}(\zeta) \leq 0\}$, $i = 1, 2$. Dan volgt uit de identiteitsstelling voor holomorfe functies: $f_2(A) \subset \Gamma_1$ of Γ_2. Zvva: $f_2(A) \subset \Gamma_1 \equiv \Gamma$. Dan volgt: $\lambda(A) = \lambda(A_1)$ en $f(A) \subset X_1$.

- $\omega(0, \Gamma, \mathbb{D}_3) > a > -1$. Beschouw $\Omega = \mathbb{D}_3 \setminus \Gamma$ en de continue functie φ op het rand van Ω, 0 op de cirkel met straal 3 en -1 op Γ. Aangezien Ω een reguliere gebied is, kunnen we het Dirichletprobleem oplossen (Ransford[11, Gevolg 4.1.8, Stellingen 4.2.2]) met φ als data: er is een continue functie u op $\bar{\mathbb{D}}_3$ dat tevens harmonisch is op Ω en zodanig dat $u = \varphi$ op $\partial\Omega$. Uit de maximum-minimum principe volgt: $-1 < u < 0$ op Ω. Omdat de smvp ***op*** Γ waar is, volgt onmiddellijk dat u subharmonisch is op $\mathbb{D}_3$. Daarom: $\omega(0, \Gamma, \mathbb{D}_3) \geq u(0) > -1$.

- $\lambda(A) < -2\pi a < 2\pi$:

$$\begin{aligned}\omega(0, \Gamma, \mathbb{D}_3) &= \sup_{E \supset \Gamma \text{ open}}\ \inf_{h \in \mathcal{A}_\Omega(0)} H_1^{-\chi_E}(h) \leq H_1^{-\chi_\Gamma}(f_2) \\ &= \frac{\lambda(A_1)}{-2\pi} = \frac{\lambda(A)}{-2\pi}.\end{aligned}$$

  Dit volgt uit de onderdelen (e) en (f) van Lemma 8.2 en $-\chi_E \leq -\chi_\Gamma$.

Hoewel Gevolg 8.6 niet voor algemene X geldt, volgt uit Stelling 8.3 en Lemma 8.4 dat het wel geldt voor alle open omgevingen U van X in een Runge omgeving van X, bijvoorbeeld een bol:

Gevolg 8.7. *Zij X een compacte verzameling in $\mathbf{C}^n$. Dan zijn de volgende equivalent:*

(i) $z_0 \in \hat{X}$.

(ii) *Er is een open bol B dat $X \cup \{z_0\}$ bevat en voor elke* open *omgeving U van X* **in** *B en $\epsilon > 0$, bestaat er een $f \in \mathcal{A}_\Omega(z_0)$ zodanig dat $\lambda(\{w \in \mathbb{T} : f(w) \in U\}) > 2\pi - \epsilon$.*

Bewijs van Stelling 8.5. Poletsky[10] beweert dat we zonder verlies van algemeenheid mogen aannemen dat F precompact ligt in Ω:[11] $\bar{F} \Subset \Omega$. Dan geldt: $t_1 = \operatorname{dist}(\bar{F}, \partial\Omega) > 0$. Zij $z_0 \in \Omega$ en zij $\omega(z_0, F, \Omega) = a_0$. We zullen m.b.v. inductie een rij van analytische schijven $f_j \in \mathcal{A}_\Omega(z_0)$ en verzamelingen $\Gamma_j \subset \mathbb{T}$ construeren waarvan de maten dichtbij $-2\pi a_0$ liggen en zodanig dat $\Gamma_{j+1} \subset \Gamma_j$ en de rij $\{f_j\}$ convergeert op $\Gamma = \cap_j \Gamma_j$ naar een functie met randwaarden in $\bar{F}$. Kies een $\varepsilon_1 > 0$ vast.

(STAP 1) Definieer $\tau_1 = t_1/8$. Omdat $\bar{F}$ compact is, bestaat er een eindige overdekking van $\bar{F}$ door open bollen: $B_k = B(z_k, \tau_1)$, $1 \leq k \leq m$, $z_k \in \bar{F}$. Beschouw $H_k = F \cap B_k$ en $\Omega_k = B(z_k, t_1)$. Zij F_k en G_k respectievelijk de plurireguliere en de niet plurireguliere punten van H_k (met respect tot Ω_k). Aangezien G_k pluripolair is (zie [1]), is ook de vereniging $G = \cup_k G_k$ pluripolair. Beschouw ook $F' = F \backslash G$. Dan $\omega^*(\bullet, F', \Omega) = \omega^*(\bullet, F, \Omega)$ en $\omega^*(\bullet, F_k, \Omega_k) = \omega^*(\bullet, H_k, \Omega_k)$ ($\equiv -1$ op F_k). Dus: F_k is pluriregulier in Ω_k. Beschouw de open omgevingen $E_k = \{z \in B_k : \omega^*(z, H_k, \Omega_k) < -1 + \varepsilon_1\}$ en $E^1 = \cup_k E_k$ van respectievelijk F_k en F'. Uit $a_0 = \omega(z_0, F, \Omega) = \omega^*(z_0, F', \Omega) \geq \omega(z_0, F', \Omega) \geq \omega(z_0, E^1, \Omega) = \Omega(z_0, E^1, \Omega)$, de laatste ongelijkheid omdat $F' \subset E^1$ en de laatste gelijkheid omdat E^1 open is, volgt

$$\Omega(z_0, E^1, \Omega) \leq a_0. \tag{8.3a}$$

(STAP 2) Uit de definitie van de functie Ω en (8.3a) volgt: $\exists f_1 \in \mathcal{A}_\Omega(z_0)$ zodanig dat $\mu(E^1, f_1) < a_0(1 - \varepsilon_1/2)$. Samen met de continuïteit van f_1 volgt: er bestaan *disjuncte gesloten* bogen γ_k in $E^1(f_1)$, $1 \leq k \leq n_1$ zodanig dat $\lambda(\Gamma_1) \geq -2\pi a_0(1 - \varepsilon_1)$, waarbij $\Gamma_1 = \cup_k \gamma_k$ en $f_1(\gamma_k) \subset B_k$.

(STAP 3) Definieer: $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/8$, $t_2 = t_1/2$ en $\tau_2 = t_2/8 = t_1/16$. Pas voor elke k $(1 \leq k \leq n)$ STAP 1 toe, waarbij: $\Omega \mapsto \Omega_k$, $F \mapsto F_k$, $\varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_2$ en $t_2 \mapsto t_1$. We krijgen dan een eindig aantal bollen $\Omega_{kj} \Subset \Omega_k$ met middelpunt in $\bar{F}_k$ en straal t_2, bollen B_{kj} met middelpunt in $\bar{F}_k$ en straal τ_2, waarbij $\left(B_{kj}\right)_j$ een overdekking van F_k is, plurireguliere $F_{kj} = B_{kj} \cap F_k$ in Ω_{kj} en open omgevingen $E_{kj} \subset B_{kj}$ van F_{kj} gedefinieerd door $E_{kj} = \{z \in B_{kj} : \omega^*(z, F_{kj}, \Omega_{kj}) < -1 + \varepsilon_2\}$. Definieer tevens: $E_k^2 = \cup_j E_{kj}$.

(STAP 4) Stel dat $w \in \gamma_k$. Dan: $\omega(f_1(w), F_k, \Omega_k) < -1 + \varepsilon_1$ omdat $f_1(w) \in E_k$. Samen met STAP 2, waarbij z_0 vervangen wordt door $f_1(w)$, volgt: er is een $f_w \in \mathcal{A}_\Omega(f_1(w))$ zodanig dat

$$\lambda(E_k^2(f_w)) > -2\pi \cdot \omega(f_1(w), F_k, \Omega_k) \cdot (1 - \varepsilon_2) \geq 2\pi(1 - \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1). \tag{8.3b}$$

Uit Lemma 5.5 volgt: er bestaat een open omgeving V van $f_1(w)$, een $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r \times V, \Omega)$ zodanig dat $h(\zeta, f_1(w)) = f_w(\zeta)$ op $\mathbb{D}_r$ en $h(0, z) = z$ op V. Uit de continuïteit van f_w en $f_w(0) = f_1(w)$ volgt: er is een omgeving W van w in $\mathbb{D}_r$ met $f_1(W) \subset V$ en zodanig dat (8.3b) ook geldt voor $h(\bullet, f_1(w'))$ voor elke $w' \in W$: $\lambda(E_k^2(h(\bullet, (f_1(w'))))) > 2\pi(1 - \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1)$. Definieer nu $h_w \in \mathbf{C}^\omega(\mathbb{D}_r \times W, \Omega)$ door $(\zeta, w) \mapsto h(\zeta, f_1(w))$.

[11] Ik zie dit niet. Het is voor mij ook niet van wezenlijk belang, daar ik alleen geïnteresseerd ben in compacte F.

Omdat γ_k compact is, volgt uit bovenstaand argument dat er *eindig* aantal *disjuncte* bogen $\gamma'_{kj} \subset \gamma_k$ en $g' \in C^\omega(\mathbb{D}_r \times \Gamma'_1, \Omega)$ zijn zodanig dat $g'(\bullet, w) \in \mathcal{A}_\Omega(f_1(w))$, waarbij $\Gamma'_1 = \cup_{kj}\gamma'_{kj}$ en tevens

$$\lambda(\cup_j \gamma'_{kj}) \geq (1-\varepsilon_2)\lambda(\gamma_k). \tag{8.3c}$$

Omdat Γ'_1 een strikte gesloten deelverzameling van de eenheidscirkel is, is een open omgeving K van Γ'_1 en een $\varrho \in C^\infty(\mathbb{T})$ met $0 \leq \varrho \leq 1$, $\varrho = 1$ op Γ'_1 en $\varrho = 0$ op $\mathbb{T} \setminus K$. We zetten g' voort tot een $g \in C^\infty(D_r \times \mathbb{T}, \Omega)$ met $g(\bullet, w) \in \mathcal{A}_\Omega(f_1(w))$:

$$g(\zeta, w) = \begin{cases} g'(\varrho(w)\zeta, w) & \text{als } (\zeta, w) \in \mathbb{D}_r \times K. \\ f_1(w) & \text{anders.} \end{cases}$$

(STAP 5) Definieer $\phi = -\chi_{E^2}$ met $E^2 = \cup_k E^2_k$. Uit Lemma 5.9 volgt dat er een $G \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_s \times \mathbb{D}_s, \Omega)$ is met $G(0, w) = f_1(w)$ en zodanig dat [12]

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'_1} H_1^\phi(G(\bullet, w))\, d\lambda(w) &\leq (1-\varepsilon_2) \int_{\Gamma'_1} H_1^\phi(g(\bullet, w))\, d\lambda(w) \\ &< 2\pi(1-\varepsilon_2)^3(1-\varepsilon_1)^2 a_0 \end{aligned} \tag{8.3d}$$

en

$$|G(\zeta, w) - g(w^k\zeta, w)| < t_2/4 \quad \forall(\zeta, w) \in \bar{\mathbb{D}} \times \Gamma'_1 \tag{8.3e}$$

gelden. Omdat $f_1(w)$ en $g(\zeta, w)$ in Ω_k liggen voor alle $(\zeta, w) \in \bar{\mathbb{D}} \times \gamma'_{kj}$ volgt: $|g(\zeta, w) - f_1(w)| < c < 2t_1$ $\forall(\zeta, w) \in \bar{\mathbb{D}} \times \Gamma'_1$. Gecombineerd met (8.3e):

$$|G(\zeta, w) - f_1(w)| < 3t_1 \quad \text{voor alle } (\zeta, w) \in \bar{\mathbb{D}} \times \Gamma'_1. \tag{8.3f}$$

(STAP 6) Voor alle $w_0 \in \mathbb{T}$, $k \in \mathbf{N}$: $|G(w_0 w^k, w) - f_1(w)| < 3t_1$ op $\mathbb{T} \times \Gamma'_1$. Poletsky beweert nu dat

$$\lambda_2(\{(w', w) \in \Gamma'_1 \times \mathbb{T} : G(w', w) \in E^2\}) > -4\pi^2(1-3\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1)a_0$$

geldt. Hieruit volgt:

$$\lambda(\{w' \in \Gamma'_1 : f_2(w') \in E^2\}) > -2\pi(1-3\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1)a_0.$$

[12] Uit (8.3b) en (8.3c) volgt

$$H_1(g(\bullet, w)) = -\frac{\mu(E^2, g(\bullet, w))}{2\pi} < -(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1),$$

en $\lambda(\Gamma'_1) \geq (1-\varepsilon_2)\lambda(\Gamma_1) \geq -2\pi a_0(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)$. Daarom:

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon_2)\int_{\Gamma'_1} H_1^(g(\bullet, w))\, d\lambda(w) &\leq (1-\varepsilon_2)[-2\pi a_0(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)][-(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1)] \\ &= 2\pi(1-\varepsilon_2)^3(1-\varepsilon_1)^2 a_0. \end{aligned}$$

Lemma 5.10 impliceert dat als k voldoende groot is, een $f_2 \in \mathcal{A}_\Omega$ van de vorm $f_2(\zeta) = G(e^{i\theta_0}\zeta^k, \zeta)$ is zodanig dat er geldt

$$|f_2(w) - f_1(w)| < 3t_1 \text{ op } \Gamma_2 = \Gamma_1' \cap E^2(f_2) \tag{8.3g}$$

en met $\lambda(\Gamma_2) > -2\pi(1-3\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1)a_0 = -2\pi(1-\varepsilon_1)a_2$ waarbij $a_2 = (1-3\varepsilon_2)a_0$. Zvva: Γ_2 is de disjuncte vereniging van een eindig aantal gesloten bogen γ_{kj} en $f_2(\gamma_{kj}) \subset \Omega_{kj}$.

(STAP 7) Pas de stappen 2 tot en met 6 toe op f_{j-1}, Γ_{j-1}, $j \geq 3$, $\varepsilon_j = \varepsilon_{j-1}/8$ en $t_j = t_{j-1}/8$: Er is een rij open bollen $\Omega_{k_1k_2\cdots k_j} \Subset \Omega_{k_1k_2\cdots k_{j-1}}$ met straal t_j en middelpunt in $\bar{F}_{k_1k_2\cdots k_{j-1}}$, verzamelingen $F_{k_1k_2\cdots k_j} \subset B_{k_1k_2\cdots k_j} \cap F_{k_1k_2\cdots k_{j-1}}$ die pluriregulier zijn in $\Omega_{k_1k_2\cdots k_j}$ en de corresponderende open omgevingen $E_{k_1k_2\cdots k_j} \subset B_{k_1k_2\cdots k_j}$, waarop $\omega^*(\bullet, F_{k_1k_2\cdots k_j}, \Omega_{k_1k_2\cdots k_j})$ kleiner is dan $-1+\varepsilon_j$. Verder hebben we $f_j \in \mathcal{A}_\Omega(z_0)$, verzamelingen $\Gamma_j \subset \mathbb{T}$ die de disjuncte vereniging zijn van een eindig aantal gesloten bogen $\gamma_{k_1k_2\cdots k_j}$ met de volgende eigenschappen:

(1) $\lambda(\Gamma_j) > -2\pi(1-\varepsilon_1)a_j$, met $a_j = (1-3\varepsilon_j)a_{j-1}$,

(2) $\gamma_{k_1k_2\cdots k_j} \subset \gamma_{k_1k_2\cdots k_{j-1}}$ en $f(\gamma_{k_1k_2\cdots k_j}) \subset E_{k_1k_2\cdots k_j}$ en

(3) $|f_j - f_{j-1}| < 3t_1$ op Γ_j.

Door $\varepsilon_1 > 0$ klein genoeg te nemen, kunnen we ervoor zorgen dat $\Pi_{j=1}^{\infty}(1-3\varepsilon_j) > 0$. Dan: $\lambda(\Gamma_j) \geq -2\pi(1-\varepsilon_1)(1-K\varepsilon_1)a_0$ voor een $K > 0$ dat onafhankelijk van j is. Dus $\lambda(\Gamma) > 0$ en de Stelling van Khinchin-Ostrowski vertelt ons dat de afbeeldingen f_j uniform convergeren naar een holomorfe afbeelding f op compacta van $\mathbb{D}$. Aangezien de f_j uniform begrensd zijn, convergeert f_j naar f bijna overal op $\Gamma = \cap_j \Gamma_j$. Uit de constructie volgt ook $f(\Gamma) \subset \bar{F}$ en daarom:

$$-\frac{1}{2\pi}\lambda(\Gamma) \leq \mu(\bar{F}, f) \leq (1-(K+1)\varepsilon_1)a_0 \tag{8.3h}$$

Laat ε naar nul gaan.

□

8.2 Capaciteitstheorie

Stelling 8.8 (Poletsky[10]). *Zij Ω een gebied in $\mathbf{C}^n$. De functie C, gedefinieerd door*

$$F \subset \Omega \ \mapsto \ C(F) = C(F, \Omega) = -\int_\Omega \omega^*(z, F, \Omega)\, dz \tag{8.4}$$

is een capaciteit op Ω, i.e.

(1) *$C(F_1) \subset C(F_2)$ als $F_1 \subset F_2$,*

(2) *als $K_j \supset K_{j+1}$ compact zijn en $K = \cap_j K_j$, dan $C(K) = lim_{j\to\infty} C(K_j)$ en*

(3) *als $F_j \subset F_{j+1}$ en $F = \cup_j F_j$, dan $C(F) = \lim_{j\to\infty} C(F_j)$.*

Schets v/h bewijs. We merken op dat onmiddellijk volgt dat C subadditief is: $C(\cup_j F_j) \leq \sum_j C(F_j)$.

(1) Onmiddellijk.

(2) Uit (1): $C(K) \leq \lim_j C(K_j)$. De omgekeerde ongelijkheid volgt uit een standaard toepassing van het topologische lemma van Choquet.

(3) Met behulp van het Poissonfunctionaal wordt (3) eerst bewezen voor het geval waar de F_i open zijn. Het algemene geval volgt door een toepassing van een niet al te moeilijke approximatie argument.

□

8.3 De Kontinuitätssatz en Kontinuitätsprinzip

Roep in herinnering de klassieke Kontinuitätssatz:

Stelling (Kontinuitätssatz). *Zij Ω een gebied in $\mathbf{C}^n$. De volgende uitspraken zijn equivalent*

(1) *Ω is pseudoconvex.*

(2) *Het* **Kontinuitätsprinzip** *geldt voor Ω: $f_n \in \mathcal{A}_\Omega$, $n \in \mathbf{N}$ en $\cup_n f_n(\mathbb{T}) \Subset \Omega \implies \cup_n f_n(\bar{\mathbb{D}}) \Subset \Omega$.*

Het is niet bekend of de Kontinuitätssatz geldig is voor pseudoconvexe complexe variëteiten anders dan gebieden in $\mathbf{C}^n$. Lárusson en Sigurdsson hebben in [7] opgemerkt dat voor variëteiten waarop de Poissonfunctionaal een plurisubharmonische omhulsel heeft, de Kontinuitätssatz een generalisatie heeft. Door de éénpuntscompactificatie $\check{\Omega}$ van Ω te beschouwen, kunnen we de Kontinuitätsprinzip als volgt formuleren:

$$f_n \in \mathcal{A}_\Omega,\ n \in \mathbf{N} \text{ en } \cup_n f_n(\mathbb{T}) \Subset \Omega \implies \lim_n f_n(0) \nrightarrow \infty$$

met ∞ het punt oneindig in $\check{\Omega}$.

Een (abstracte) complexe variëteit wordt een pseudoconvex variëteit genoemd indien het een plurisubharmonische uitputtingsfunctie (Engels: *exhaustion function*) heeft.

Stelling 8.9. *Zij V een complexe variëteit waarop de Poissonfunctionaal een plurisubharmonische omhulsel heeft. Dan zijn het volgende equivalent.*

(1) *V is pseudoconvex.*

(2) *Er is een usc functie ϕ op V zodanig dat als $f_n \in \mathcal{A}_\Omega$, $n \in \mathbf{N}$ en*

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \phi \circ f_n \, d\lambda = M < \infty, \tag{8.5}$$

dan $\lim_n f_n(0) \nrightarrow \infty$.

Merk op dat bovenstaande stelling zwakker is dan de Kontinuitätssatz, omdat conditie (2) sterker is dan de Kontinuitätsprinzip.

Bewijs.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : Zij Φ een uitputtingsfunctie op V. Omdat Φ psh is, hebben we

$$\Phi \circ f_n(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \Phi \circ f_n \, d\lambda \leq M,$$

en dus $\{f_n(0)\} \subset \Phi^{-1}((-\infty, M]) \Subset V$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) : Beschouw de psh functie $\Phi = \mathrm{EH}_1^{\phi}$. De bewering is dat Φ een uitputtingsfunctie is. Stel dat dat niet het geval is. Dan is er een $c \in \mathbf{R}$ zodanig dat de verzameling $\{x \in V : \Phi(x) < c\}$ niet precompact ligt in V. Er zijn dan $x_n \in V$, $x_n \to \infty$ zodanig dat $\Phi(x_n) < c$, i.e.

$$\inf_{f \in \mathcal{A}_V(x_n)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \phi \circ f \, d\lambda < c.$$

Voor alle n bestaat er daarom een $f_n \in \mathcal{A}_V(x_n)$ zodanig dat $H_1^{\phi}(f_n) < c$. Oftewel: $\int_{\mathbb{T}} \phi \circ f_n \, d\lambda < 2\pi c < \infty$ voor alle n met $f_n(0) = x_n \to \infty$; een tegenspraak.

□

Een gevolg van de omkering van Stelling 8.9 geeft ons een obstructie voor het niet pseudoconvex zijn van een complexe variëteit.

Stelling 8.10. *Zij V een complexe variëteit waarop de Poissonfunctionaal een plurisubharmonische omhulsel heeft. Dan zijn het volgende equivalent.*

(1) *V is niet pseudoconvex.*

(2) *Voor alle usc functies ϕ op V zijn er analytische schijven $f_n \in \mathcal{A}_V$, $n \in \mathbf{N}$ zodanig dat $\lim_n f_n(0) \to \infty$ en*

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \int_{\mathbb{T}} \phi \circ f_n \, d\lambda < \infty.$$

Gevolg 8.11. *Zij V een complexe variëteit die niet pseudoconvex is en waarop de Poissonfunctionaal een plurisubharmonische omhulsel heeft. Dan zijn er analytische schijven $f_n \in \mathcal{A}_V$ met $\lim_n f_n(0) \to \infty$, zodanig dat voor alle $\epsilon > 0$ een compacte verzameling $X = X(\epsilon) \subset V$ bestaat zodanig dat $\lambda(\{w \in \mathbb{T} : f_n(w) \in X\}) > 2\pi(1 - \epsilon)$ voor alle n.*

Bewijs. Pas Stelling 8.10 toe op een usc uitputtingsfunctie ϕ. □

Referenties

[1] E. Bedford and B. A. Taylor. A new capacity for plurisubharmonic functions. *Acta Math.*, 149:1–40, 1982.

[2] O. Forster. *Riemannsche Flächen.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1977.

[3] L. Hörmander. *An introduction to complex analysis in several variables.* Van Nostrand Company, Inc, Princeton, New Jersey, 1966.

[4] L. Hörmander. *Notions of convexity.* Birkhaüser, Boston, 1994.

[5] C. O. Kiselman. Plurisubharmonic functions and their singularities. pages 1–52, 1993.

[6] S. G. Krantz. *Function theory of several complex variables.* Wadsworth & Brooks/Cole, New York, Chichester, 1991.

[7] Finnur Lárusson and Ragnar Sigurdsson. Plurisubharmonic functions and analytic discs on manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, 501:1–39, 1998.

[8] P. Lelong. *Plurisubharmonic functions and positive differential forms.* Gordon and Breach, New York, 1969.

[9] E. A. Poletsky. Plurisubharmonic functions as solutions of variational problems. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 52:163–171, 1991.

[10] E. A. Poletsky. Holomorphic currents. *Indiana Univ. Math. J.*, 42:85–144, 1993.

[11] T. Ransford. *Potential theory in the complex plane.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[12] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, New York, 1987.

[13] A. Sadullaev. Plurisubharmonic functions. *Several complex variables II, G. Khenkin en A. Vitushkin (red.)*, pages 59–106, 1994.

[14] Ragnar Sigurdsson. Convolution equations in domains in $\mathbf{C}^n$. *Arkiv för mat.*, 29:285–305, 1991.

[15] M. Tsuji. *Potential theory in Modern Function Theory.* Chelsea Publishing Company, New York, NY, 1958.

[16] J. Wermer. *Banach algebras and several complex variables.* Springer-Verlag, New York, 1976.