

D. M. van Diemen

# Homotopie en Hopf

Bachelorscriptie, 7 juni 2010

Scriptiebegeleider: dr. B. de Smit



Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Homotopie</b>	<b>4</b>
2.1	Hogere homotopiegroepen . . . . .	4
2.2	Uitrekenen van homotopiegroepen . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Quaternionen en Hopf</b>	<b>7</b>
3.1	Introductie quaternionen . . . . .	7
3.2	Lineaire afbeeldingen . . . . .	8
3.3	Introductie Hopf . . . . .	9
3.4	Vezelbundelstructuren . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Exacte rijtjes</b>	<b>12</b>
4.1	Introductie exacte rij . . . . .	12
4.2	Homotopie . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Hoofdstelling</b>	<b>14</b>

# 1 Inleiding

In dit artikel spreken we over de Hopf-fibratie. De Hopf-fibratie is een afbeelding van de  $S^3$  naar de  $S^2$ , met mooie eigenschappen. Het bijzondere is dat deze functie het gereedschap is om moeilijkere topologie te bedrijven. We kunnen namelijk de Hopf-fibratie gebruiken om hogere homotopiegroepen van de  $S^2$  en de  $S^3$  te berekenen. De berekening van de  $\pi_1(S^1, x_0)$  ons bekend is, en kost enige moeite. Veel hogere homotopiegroepen zijn moeilijk te berekenen, en voor enkelen zijn specifieke geavanceerde algoritmes bekend. Een van de eerste niet-triviale homotopiegroepen is de volgende:

**Stelling 1.1.** *Er geldt:*

$$\pi_3(S^2, x_0) \cong \mathbb{Z}.$$

Dit zal de hoofdstelling zijn van dit artikel.

Om deze stelling te kunnen bewijzen geven we eerst een introductie in de homotopie. Hierin worden ook enkele andere hogere homotopiegroepen uitgerekend. Niet alle stellingen zijn volledig uitgewerkt. Verdere verdieping is te vinden in [1] en [2]. Deze stellingen over hogere homotopiegroepen zijn voornamelijk bedoeld om in de sectie over exacte rijtjes te verwerken om een mooi bewijs van de hoofdstelling te kunnen geven.

Na het onderdeel over hogere homotopiegroepen wordt de Hopf-fibratie behandeld. Om deze te kunnen definiëren gebruiken we de quaternionen. Na een inleiding komt in deze scriptie naar voren wat het voordeel is om quaternionen te gebruiken in plaats van matrices. Ook in dit onderdeel zal niet alles uitgewerkt worden, en verwijs ik door naar [3].

Als laatste onderdeel van deze scriptie laten we enkele resultaten met oneindig lange exacte rijen zien, waarmee we de hoofdstelling zullen bewijzen. Ondanks de betrekkelijke eenvoud van het uiteindelijke bewijs, zit de schoonheid in het combineren van verschillende elementen uit de theorie over de quaternionen, de mooie eigenschappen van de Hopf-fibratie, en de eigenschappen van de exacte rijen. Dit blijkt niet alleen uit het bewijs zelf, maar ook uit de gevolgen hiervan, zoals de mogelijkheid de Hopf-fibratie op te vatten als element van de  $\pi_3(S^2, x)$ . Deze zullen niet in de scriptie uitgewerkt worden.

## 2 Homotopie

### 2.1 Hogere homotopiegroepen

Homotopiegroepen zijn een belangrijk onderdeel van de topologie, dit zijn namelijk belangrijke invarianten van ruimten. De eerste homotopiegroep, oftewel de fundamenteaalgroep, beschrijft intuïtief of er gaten in een wegsamenhangscomponent zitten. We beschouwen eerst een voorbeeld van een fundamenteaalgroep.

**Voorbeeld 2.1.** Als we de fundamenteaalgroep  $\pi_1(S^1, x_0)$  willen bepalen, beelden we lussen af op de  $S^1$ . In [2] merken we dat dit niet al te eenvoudig te berekenen is. Intuïtief gezien is natuurlijk wel in te zien, en we vinden ook inderdaad uit het bewijs dat

$$\pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}.$$

Zoals de naam al suggereert is de fundamenteaalgroep een groep. Deze groep heeft de samenstelling van 2 lussen  $f$  en  $g$  als groepsbewerking.

We zullen nu de algemene definitie geven. Hiervoor definiëren we eerst de  $n$ -dimensionale eenheidskubus.

**Definitie 2.2.** De  $n$ -dimensionale eenheidskubus  $I^n$  is als volgt gedefinieerd:

$$I^n = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1].$$

We merken hieraan 2 dingen op. We zien namelijk dat de rand gelijk is aan:

$$\partial I^n = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \setminus ((0, 1) \times (0, 1) \times \dots \times (0, 1)).$$

Verder zien we, als we  $n = 0$  beschouwen, dat een leeg Cartesisch product van verzamelingen een punt is, en dat de rand van  $I^0$  leeg is.

**Definitie 2.3.** De  $n$ -de homotopiegroep van een topologische ruimte  $X$  met basispunt  $x_0$  is:

$$\pi_n(X, x_0) = \{f : I^n \rightarrow X \text{ continu} \mid \forall t \in \partial I^n : f(t) = x_0\} / \sim,$$

met als equivalentierelatie de homotopie van functies, oftewel:

$$f \sim g \iff \exists F : I \times I^n \rightarrow X \text{ met } F(0, x) = f, F(1, x) = g, F \text{ continu,} \\ \text{en } \forall s \in I \times \partial I^n : F(t, s) = x_0.$$

We beschouwen kort het geval  $n = 0$ , aangezien de  $\pi_0$  enkele eigenschappen heeft die we later zullen gebruiken.

Er geldt voor een topologische ruimte  $X$  met basispunt  $x_0$ :

$$\pi_0(X, x_0) = \{f : I^0 \rightarrow X \text{ continu} \mid \forall t \in \partial I^0 : f(t) = x_0\} / \sim \\ = \{f : \{y\} \rightarrow X \text{ continu}\} / \sim.$$

Aangezien we als equivalentierelatie de homotopie van functies hebben, is dit dus de verzameling wegsamenhangscomponenten van  $X$ . We merken hierbij op dat dit geen groep is. Ook zien

we dat als  $X$  discreet is, er geldt:  $\pi_0(X, x) \cong X$ .

Verder zien we dat een hogere homotopiegroep wel een groep is, met als groepsbewerking de samenstelling. Zoals we in de inleiding opmerkten zijn hogere homotopiegroepen erg lastig uit te rekenen. Als topologische ruimtes bepaalde eigenschappen en structuren hebben, zoals bij de  $S^2$ , is dit eenvoudiger. Toch is bijvoorbeeld de  $\pi_4(S^2, x_0)$  al niet eenvoudig uit te rekenen, en zijn hier technieken zoals de Serre spectral sequence voor nodig, en hebben we gezien hoeveel er nodig is om de  $\pi_1(S^1, x_0)$  uit te rekenen.

## 2.2 Uitrekenen van homotopiegroepen

We zullen enkele stellingen over eenvoudigere homotopiegroepen behandelen die van belang zijn voor het bewijs van onze hoofdstelling. De resultaten van deze stellingen zullen we gebruiken in de sectie over exacte rijen. Als eerste beschouwen we een stelling over de homotopiegroepen van de  $S^1$ .

**Stelling 2.4.** *Er geldt voor alle  $i \in \mathbb{Z}_{>1}$ :*

$$\pi_i(S^1, x_0) \cong 0.$$

Deze stelling zullen we bewijzen in de sectie over exacte rijen. Een andere stelling die we beschouwen in dit artikel luidt als volgt.

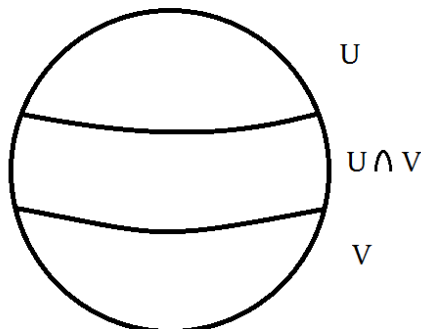
**Stelling 2.5.** *Er geldt voor  $i, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  met  $i < n$ :*

$$\pi_i(S^n, x_0) \cong 0.$$

In [1] staat een bewijs wat gebruik maakt van CW-structuren. Wij zullen hier een topologisch argument beschouwen. Hiervoor gebruiken we een stelling, welke we veralgemeniseerd hebben vanuit stelling 5.12 uit [2].

**Stelling 2.6.** *Zij  $X$  een topologische ruimte zijn die geschreven kan worden als de vereniging van 2 open verzamelingen,  $U, V$ , met  $\pi_i(U, u_0) \cong \pi_i(V, v_0) \cong 0$ , en dat voor  $U \cap V$  geldt dat  $\pi_{i-1}(U \cap V, w_0) \cong 0$ . Dan geldt:  $\pi_i(X, x_0) \cong 0$ .*

Deze stelling zullen we in dit artikel niet bewijzen, maar is ook de veralgemenisering van het bewijs in [2], welke met het Lemma van Lebesgue wordt gegeven. Wel zullen we laten zien hoe we de  $S^n$  op kunnen splitsen voor  $n \geq 2$ . We laten eerst kort zien hoe dit in de  $S^2$  gebeurde. Beschouw het volgende plaatje.



We zien hier dus dat  $U$  en  $V$  isomorf zijn aan de  $\mathbb{R}^2$ , en  $U \cap V$  met  $I \times S^1$ . Dit resultaat kunnen we veralgemeniseren naar de  $S^n$  door  $U$  en  $V$  isomorf te nemen aan de  $\mathbb{R}^n$ , en  $U \cap V$  isomorf aan  $I \times S^{n-1}$ .

Uit dit argument volgt dat stelling 2.5 uit stelling 2.6 volgt.

We zullen nu verdergaan naar het geval dat  $i = n$ . Hiervoor beschouwen we eerst een andere stelling, namelijk een stelling van Freudenthal[5].

**Stelling 2.7** (Freudenthal suspension theorem). *De functie*

$$f : \pi_i(S^n, x_0) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1}, y_0)$$

*is een isomorfisme als  $i < 2n - 1$ , en  $f$  is surjectief als  $i = 2n - 1$ .*

Deze stelling zullen we in dit artikel niet bewijzen. Wel beschouwen we een geval van deze stelling, namelijk het volgende.

**Gevolg 2.8.** *Beschouw de rij functies:*

$$\pi_1(S^1, x_1) \xrightarrow{f_1} \pi_2(S^2, x_2) \xrightarrow{f_2} \pi_3(S^3, x_3) \xrightarrow{f_3} \dots$$

*De suspensiestelling geeft hier dat  $f_1$  surjectief is, en dat alle  $f_i$  met  $i \geq 2$  isomorfismen zijn.*

In het onderdeel over exacte rijtjes zullen we bewijzen dat ook  $f_1$  een isomorfisme is.

Aangezien we nu de benodigde stellingen hebben behandeld voor ons bewijs van de hoofdstelling, laten we dit onderwerp rusten. We zullen verdergaan over de Hopf-fibratie, en deze gaan we opbouwen vanuit de quaternionen.

### 3 Quaternionen en Hopf

#### 3.1 Introductie quaternionen

We definiëren de quaternionen[3]  $\mathbb{H}$  als

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k, \quad \text{met}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i, \quad ki = j \quad \text{en} \quad ik = -j.$$

Deze rekenregels geven dat de  $\mathbb{H}$  een niet-commutatieve ring. We zien dus dat  $\mathbb{H}$  geen lichaam is.

We beschouwen het quaternion  $r = a + bi + cj + dk$ . De geconjugeerde van  $r$  is  $\bar{r} = a - bi - cj - dk$ . Conjugatie is dus een involutie over  $\mathbb{H}$ . We zien ook snel in dat  $r + \bar{r} \in \mathbb{R}$ , aangezien  $r + \bar{r} = 2a$ . Ook merken we op dat de volgende regel geldt:  $\overline{\overline{p} + \bar{r}} = \overline{p} + \bar{r}$ .

De norm van  $r$  is  $\|r\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ . Er geldt voor de norm:  $\|pr\| = \|p\| \cdot \|r\|$ . Voor de norm van een quaternion geldt altijd  $\|r\| \in \mathbb{R}$ . Om dit te bewijzen voeren we een andere notatie in. We kunnen de quaternionenring namelijk ook zien als:

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j,$$

met  $j^2 = -1$ , en  $ij = -ji$ . We zien dus dat voor een  $z \in \mathbb{C}$ :  $j\bar{z} = j(x - yi) = zj + yij = zj$ . We zullen in deze notatie over  $\mathbb{C}$  bewijzen voor  $r \in \mathbb{H}$  dat  $r\bar{r} \in \mathbb{R}$ . We zien namelijk voor een  $r \in \mathbb{H}$  dat  $r = z + wj$ , met

$$\bar{r} = \bar{z} + \overline{wj} = \bar{z} + \overline{cj + dij} = \bar{z} - wj = \bar{z} - j\bar{w}.$$

Dit geeft het volgende:

$$r\bar{r} = (z + wj)(\bar{z} - j\bar{w}) = z\bar{z} - zj\bar{w} + wj\bar{z} - wj^2\bar{w} = z\bar{z} + w\bar{w},$$

en dit is een element van  $\mathbb{R}$ , omdat de regel die we wilden bewijzen geldt over  $\mathbb{C}$ . We zien dus dat  $r\bar{r}$  een element is van  $\mathbb{R}$ , en dus is  $\sqrt{r\bar{r}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \|r\|$  ook een element van  $\mathbb{R}$ .

We beschouwen de inverse van  $r$ . We hebben zojuist vastgesteld dat elk element  $r$  een geconjugeerde heeft, en elk element  $r$  een norm. We definiëren:

$$r^{-1} = \frac{\bar{r}}{\|r\|^2}.$$

Voor elk element  $r \in \mathbb{H}$ ,  $r \neq 0$  geldt dus dat  $r^{-1} \in \mathbb{H}$ .

We beschouwen de quaternionen met  $\|r\| = 1$ . Dit geeft het volgende:

$$\{r \in \mathbb{H} : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}.$$

Aangezien we de quaternionen vanuit de  $\mathbb{R}^4$  hebben opgebouwd, en hiermee hebben geïdentificeerd, zien we dat

$$\{r \in \mathbb{H} : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} = S^3.$$

We kunnen dus op zekere wijze de  $S^3$  beschouwen binnen de quaternionen. Aangezien  $\|pr\| = \|p\| \cdot \|r\|$ , zien we dat deze  $S^3$  gesloten is onder vermenigvuldiging met elementen uit de  $S^3$ . Deze bewerking geeft aanleiding tot het beschouwen van afbeeldingen van de  $S^3$  naar zichzelf, of naar de  $S^2 \subset S^3$ . We beschouwen eerst algemenere lineaire afbeeldingen op  $\mathbb{H}$ .

## 3.2 Lineaire afbeeldingen

Een van de voordelen van het gebruik van quaternionen is de mogelijkheid om lineaire afbeeldingen niet in matrixvorm te hoeven schrijven. We definiëren de afbeelding waarmee we de Hopf-fibratie definiëren. Hiervoor beschouwen we eerst de volgende deelruimte van  $\mathbb{H}$ , namelijk  $V$ . Zij  $V = \{h \in \mathbb{H} : h + \bar{h} = 0\}$ . We zien dus dat  $V = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ , en dit kunnen we identificeren met de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definitie 3.1.** Voor  $r \in \mathbb{H}$ ,  $r \neq 0$ , is  $R_r$  de afbeelding:

$$R_r(q) : V \rightarrow V, q \mapsto rqr^{-1}$$

We bewijzen dat deze afbeelding enkele fijne eigenschappen heeft, namelijk lineariteit, en dat dit een rotatie is.

**Stelling 3.2.** Voor  $r \neq 0$  is  $R_r(q) : V \rightarrow V, q \mapsto rqr^{-1}$  een rotatie.

**Bewijs:**

Zij  $r \in \mathbb{R}$ . Dan geldt:  $rqr^{-1} = q$ . De identiteit is een rotatie. We beschouwen dus het geval dat  $r \notin \mathbb{R}$ .

Merk op: vanwege de rekenregels op  $\mathbb{H}$  is  $R_r$  een lineaire afbeelding. We weten namelijk voor  $p, q \in \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  dat  $pq \in \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ .

Ook bewaart  $R_r$  de norm, aangezien

$$rqr^{-1} = rq \left( \frac{\bar{r}}{\|r\|^2} \right) = \frac{rq\bar{r}}{\|r\|^2},$$

dus

$$\|rqr^{-1}\| = \left\| \frac{r}{\|r\|} \right\| \cdot \|q\| \cdot \left\| \frac{\bar{r}}{\|r\|} \right\| = 1 \cdot \|q\| \cdot 1 = \|q\|.$$

$R_r$  is dus een orthogonale afbeelding op  $V$ , welke we kunnen identificeren met de  $\mathbb{R}^3$ . Als we  $R_r$  als matrixrepresentatie beschouwen zien we dat  $R_r \in O(3, \mathbb{R})$ .

Als  $R_r$  een rotatie is heeft de eigenruimte van eigenwaarde 1 dimensie 1. We bepalen dus de dimensie van de eigenruimte van eigenwaarde 1, oftewel van  $\ker(R_r - id_V)$ . Als we dit over  $\mathbb{H}$  beschouwen zien we dat dit equivalent is met het bepalen van de dimensie van  $\{q \in V : rqr^{-1} = q\}$  over  $\mathbb{R}$ .

We moeten dus vinden welke  $q \in V$  commuteren met  $r$ . Eerst beschouwen we welke  $q \in \mathbb{H}$  commuteren met  $r$ . Merk op dat alle  $q \in \mathbb{R}$  met  $r$  commuteren, en dat  $r$  met  $r$  commuteert, waarbij  $r \notin \mathbb{R}$ . Het element  $r$  commuteert dus met  $\mathbb{R}[r]$ , wat van graad 2 is over  $\mathbb{R}$ , aangezien  $r \notin \mathbb{R}$ ,  $r^2 - (r + \bar{r})r + \bar{r}r = 0$  met  $r + \bar{r} \in \mathbb{R}$  en  $\bar{r}r \in \mathbb{R}$ . Stel nu dat er een  $p \notin \mathbb{R}[r]$  met  $r$  commuteert. Nu commuteert  $r$  met  $\mathbb{R}[r, p]$ , wat minimaal van graad 4 is over  $\mathbb{R}$ , oftewel  $r$  commuteert met alle  $h \in \mathbb{H}$ . Dit geeft een tegenspraak omdat  $\mathbb{H}$  niet commutatief is. We merken ook op dat  $\mathbb{R}[r]$  een lichaam is.

Concluderend uit het voorafgaande merken we op dat

$$\dim_{\mathbb{R}[r]} \{q \in \mathbb{H} : rqr^{-1} = q\} = 1,$$

en omdat  $\mathbb{R}[r]$  van graad 2 is over  $\mathbb{R}$ , geldt:

$$\dim_{\mathbb{R}} \{q \in \mathbb{H} : rqr^{-1} = q\} = 2.$$



Aangezien we eerder zagen dat  $V \oplus \mathbb{R} = \mathbb{H}$ , en  $\mathbb{R} \subset \{q \in \mathbb{H} : rqr^{-1} = q\}$ , geldt

$$\dim_{\mathbb{R}}\{q \in V : rqr^{-1} = q\} = 1.$$

We vinden dus dat de  $R_r(q)$  een rotatie is.

Een korte opmerking om aan te duiden hoe nuttig deze schrijfwijze is: in plaats van het rekenen met matrices vinden we nu de as van de rotatie van  $R_r$  door naar  $r$  als vector met norm 1 in  $\mathbb{R}^4$  te kijken. Voor  $r = \pm 1$  is  $R_r$  de identiteit, en voor  $r = a + bi + cj + dk$  is de as van de rotatie  $(b, c, d)$ , en de hoek van de rotatie  $\theta = 2 \arcsin(\sqrt{b^2 + c^2 + d^2})$ . [3]

### 3.3 Introductie Hopf

We hebben nu de afbeelding  $R_r$  beschouwd voor vaste  $r$ . We beschouwen nu de volgende afbeelding:

$$\phi : S^3 \rightarrow \text{SO}(3), r \mapsto R_r$$

We kunnen de  $S^3$  als deel van de quaternionen opvatten, en we hebben zojuist opgemerkt dat voor elke rotatie een  $r$  bestaat, aangezien de hoek en de as van de rotatie deze geven. De afbeelding  $\phi$  is dus surjectief. Verder merken we op dat de  $\text{SO}(3)$  een transitieve werking heeft op de  $S^2$ , aangezien dit de rotaties zijn in de  $\mathbb{R}^3$ . Hieruit volgt dat de  $S^3$  transitief werkt op de  $S^2$ . We zien dus dat de Hopf-fibratie, welke we nu zullen definiëren, surjectief is.

**Definitie 3.3** (Hopf-fibratie). Zij  $q \in S^2$ . De Hopf-fibratie is de afbeelding:

$$h : S^3 \rightarrow S^2, r \mapsto R_r(q).$$

### 3.4 Vezelbundelstructuren

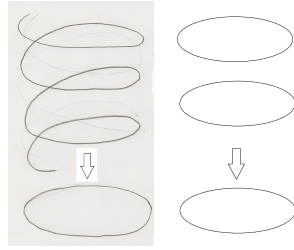
Voor de hoofdstelling hebben we nodig dat we de Hopf-fibratie kunnen gebruiken om een exacte rij van homotopiegroepen te maken. Hiervoor moet de Hopf-fibratie de projectie binnen een vezelbundelstructuur zijn op de  $S^3$ . We beschouwen eerst de definitie.

**Definitie 3.4.** Een vezelbundelstructuur op een ruimte  $E$ , met vezel  $F$ , bestaat uit een projectie  $p : E \rightarrow B$ , zodat voor alle  $x \in B$  er een open omgeving  $U$  bestaat waarvoor er een homeomorfisme  $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  bestaat welke

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ p \downarrow & \swarrow \text{proj}_1 & \\ U & & \end{array}$$

laat commuteren.

Een overdekking is een vezelbundel met discrete vezel. Het volgende plaatje laat hier een voorbeeld voor zien op de  $S^1$ .



We zien dat bij deze overdekkingen de vezel discreet is. Dit is bij een vezelbundelstructuur niet vereist. We zullen hier kort een voorbeeld van geven.

**Voorbeeld 3.5** (Möbiusband). Een van de eenvoudigste voorbeelden van een vezelbundelstructuur zonder discrete vezel  $F$  is degene op de möbiusband. We kunnen de möbiusband op de  $S^1$  projecteren, en krijgen als vezel  $[0, 1]$ .

We nemen aan dat de Hopf-fibratie een vezelbundelstructuur geeft, een bewijs hiervan is te vinden in [1]. We zullen wel aantonen dat de vezel van de Hopf-fibratie de  $S^1$  is. Aangezien de vezel van een punt de elementen bevat die op dat punt terechtkomen, beschouwen we voor een punt  $q \in V$ , met norm 1, de  $r \in \mathbb{H}$  met norm 1, welken met  $q$  commuteren. We bewijzen dus de volgende stelling:

**Stelling 3.6.** Voor  $q \in V$  met  $|q| = 1$  geldt:

$$\{r \in S^3 : rqr^{-1} = q\} = \mathbb{R}[q] \cap S^3 = S^1.$$

**Bewijs:**

We beschouwen kort de eerste gelijkheid. We weten uit het bewijs van stelling 3.2 dat

$$\{r \in \mathbb{H} : rqr^{-1} = q\} = \mathbb{R}[q].$$

Dit geeft de eerste gelijkheid. Voor de tweede stelling moet meer bewezen worden. We weten dat  $\mathbb{R}[q]$  een lichaam van graad 2 is over  $\mathbb{R}$ , omdat

$$q^2 - (q + \bar{q})q + q\bar{q} = 0,$$

met  $q + \bar{q} \in \mathbb{R}$  en  $q\bar{q} \in \mathbb{R}$ .  $\mathbb{R}[q]$  is dus een vlak. Intuïtief weten we dat de doorsnede van de  $S^3$  met een vlak door de oorsprong een  $S^1$  is. Om dit te bewijzen willen we dat de norm op  $\mathbb{R}[q]$  als deelverzameling van  $\mathbb{H}$  te identificeren is met de norm op het isomorfe lichaam  $\mathbb{C}$ .

We beschouwen  $\mathbb{H}$  als volgt:

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k.$$

Merk op dat  $0 \in \mathbb{H}$ , en we weten dat  $\forall p \in \mathbb{H} \setminus \{0\} : p^{-1} \in \mathbb{H}$ .  $\mathbb{H}$  is dus een delingsring. We weten dat conjugatie een automorfisme is op  $\mathbb{H}$ . We zullen nu de conjugatie over  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}q = \mathbb{R}[q]$  beschouwen.

We weten dat  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}q$  commutatief is, dat  $0 \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}r$  en we zagen zojuist dat  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}r$  gesloten is onder conjugatie en dus ook onder het nemen van inverses, vanwege de vergelijking  $q^2 - (q + \bar{q})q + q\bar{q} = 0$ , met  $q + \bar{q} \in \mathbb{R}$  en  $q\bar{q} \in \mathbb{R}$ .  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}r$  is dus een lichaam van graad 2 over  $\mathbb{R}$ . Er is echter maar een lichaam van graad 2 over  $\mathbb{R}$ , dus  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}r$  is isomorf met  $\mathbb{C}$ .

Op  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}r$  is de conjugatie een ringhomomorfisme, dus het isomorfisme van  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}r \rightarrow \mathbb{C}$  respecteert de conjugatie.

We zien dus voor de vezel  $F$  van de vezelbundelstructuur, geïnduceerd door de Hopf-fibratie, dat  $F = S^1$ . We hebben nu zowel van de homotopiegroepen als van de Hopf-fibratie de nodige eigenschappen bewezen. We zullen nu verdergaan over exacte rijtjes, om deze opgedane kennis samen te voegen tot het bewijs van de hoofdstelling.

## 4 Exacte rijtjes

### 4.1 Introductie exacte rij

In het bewijs van de hoofdstelling in dit artikel wordt gebruik gemaakt van exacte rijtjes. Een eenvoudige introductie is te vinden in [4]. Naast de bekende exacte rijen introduceren we nu een oneindig lange exacte rij, namelijk de volgende:

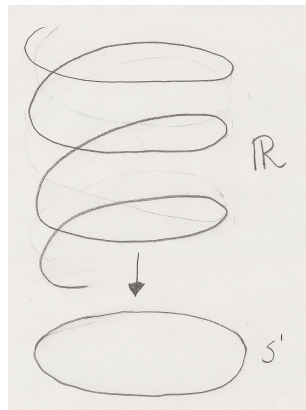
**Stelling 4.1.** : Gegeven een vezelbundelstructuur op de topologische ruimte  $\tilde{X}$ , met  $F$  de vezel,  $X$  de basisruimte,  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  de projectie, en  $x_0 = p(\tilde{x}_0)$  het basispunt van  $X$ . Dan is

$$\dots \rightarrow \pi_{i+1}(X, x_0) \rightarrow \pi_i(F, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_i(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_i(X, x_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(X, x_0)$$

een exacte rij.

Deze stelling zullen we hier niet bewijzen. Het bewijs is te vinden in [1]. Wel zullen we enkele voorbeelden beschouwen.

**Voorbeeld 4.2.** Een bekend voorbeeld uit de topologie[2] van een vezelbundelstructuur is de overdekking van de  $S^1$  door  $\mathbb{R}$ .



De vezel  $F$  is isomorf met  $\mathbb{Z}$ , welke inderdaad discreet is. We beschouwen een deel van de exacte rij:

$$\pi_1(\mathbb{R}, r) \rightarrow \pi_1(S^1, s) \rightarrow \pi_0(\mathbb{Z}, r) \rightarrow \pi_0(\mathbb{R}, r)$$

Aangezien  $\mathbb{R}$  samenhangend is, weten we dat  $\pi_1(\mathbb{R}, r) \cong \pi_0(\mathbb{R}, r) \cong 0$ . Ook weten we dat de  $\pi_0$  van een topologische ruimte de verzameling wegsamenhangscomponenten is. Dit geeft  $\pi_0(\mathbb{Z}, r) \cong \mathbb{Z}$  als verzameling. We vullen dit in in de exacte rij:

$$0 \rightarrow \pi_1(S^1, s) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

waarbij niet alle pijlen meer staan voor groepsisomorfismen. We concluderen uit deze exacte rij dat de kardinaliteit van  $\pi_1(S^1, s)$  gelijk is aan de kardinaliteit van  $\mathbb{Z}$ .

### 4.2 Homotopie

Deze exacte rij kunnen we gebruiken om verschillende eerdere stellingen in dit artikel te bewijzen. Een van deze stellingen komt uit de sectie homotopie, namelijk stelling 2.4.

Hiervoor beschouwen we een propositie die we af kunnen leiden uit de stelling over oneindig

lange exacte rijtjes door naar een vezelbundelstructuur te kijken met discrete vezel. De totale ruimte is in dit geval een overdekking van de basisruimte. We beschouwen dus de volgende propositie.

**Propositie 4.3.** *Zij  $\tilde{X}$  een overdekking van  $X$  met vezel  $F$ ,  $n \geq 2$  en*

$$p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$$

*een projectie. Dan is*

$$p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

*een isomorfisme.*

**Bewijs:**

Beschouw de volgende rij, die vanwege stelling 4.1 exact is:

$$\pi_n(F, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, \tilde{x}_0).$$

Voor  $n \geq 2$  geldt:  $\pi_n(F, \tilde{x}_0) \cong \pi_{n-1}(F, \tilde{x}_0) \cong 0$ . We zien dus in de exacte rij dat  $p_*$  een isomorfisme is.

Nu we deze propositie bewezen hebben zullen we de stelling uit de homotopie bewijzen. Dit is nu niet meer zo moeilijk.

**Bewijs van stelling 2.4:**

We gebruiken de propositie hierboven. Zij  $X = S^1$ ,  $\tilde{X} = \mathbb{R}$ , en  $i = n$ . Nu geldt dat

$$\pi_i(S^1, x_0) \cong \pi_i(\mathbb{R}, x_1) \cong 0.$$

## 5 Hoofdstelling

**Stelling 5.1.** *Er geldt:*

$$\pi_3(S^2, x_0) \cong \mathbb{Z}.$$

**Bewijs:**

Zoals we gezien hebben voldoet de Hopf-fibratie aan de eisen om de projectie te zijn in een vezelbundelstructuur op de  $S^3$ , met als projectie de Hopf-fibratie  $h : S^3 \rightarrow S^2$ , en vezel  $S^1$ . Stelling 4.1 geeft nu dat de rij

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_3(S^1, x) \rightarrow \pi_3(S^3, x) \rightarrow \pi_3(S^2, h(x)) \rightarrow \pi_2(S^1, x) \rightarrow \pi_2(S^3, x) \rightarrow \pi_2(S^2, h(x)) \rightarrow \\ \pi_1(S^1, x) \rightarrow \pi_1(S^3, x) \rightarrow \pi_1(S^2, h(x)) \rightarrow \pi_0(S^1, x) \rightarrow \pi_0(S^3, x) \rightarrow \pi_0(S^2, h(x)) \end{aligned}$$

exact is. Uit de sectie over homotopiegroepen weten we dat we veel van deze homotopiegroepen uit kunnen rekenen. We kunnen bijvoorbeeld uit stelling 2.4 enkele homotopiegroepen uitrekenen, en dit in de rij invullen. Dit kan ook met stelling 2.5. We krijgen door dit in te vullen de volgende rij.

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \pi_3(S^3, x) \rightarrow \pi_3(S^2, h(x)) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \pi_2(S^2, h(x)) \rightarrow \pi_1(S^1, x) \rightarrow 0$$

We zien dat

$$\pi_1(S^1, x) \cong \pi_2(S^2, h(x)),$$

en uit gevolg 2.8 zien we nu dat

$$\pi_1(S^1, x) \cong \pi_2(S^2, h(x)) \cong \pi_3(S^3, x).$$

Ook dit vullen we in in de exacte rij, waarbij  $f$  de afbeelding tussen de  $\pi_3(S^3, x)$  en de  $\pi_3(S^2, h(x))$  is. We vinden nu de rij:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \pi_3(S^2, h(x)) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Aangezien dit een exacte rij is zien we direct dat  $f$  een isomorfisme is. Er geldt dus:

$$\pi_3(S^2, h(x)) \cong \mathbb{Z},$$

waarmee de hoofdstelling bewezen is.

## Referenties

- [1] Alan Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002
- [2] M.A.Armstrong, *Basic Topology*, Springer-verlag New York Inc., 1983
- [3] David. W. Lyons, *An Elementary Introduction to the Hopf Fibration*, Mathematics Magazine 76 (2): 8798, 2003
- [4] P. Stevenhagen, *Algebra II*, Universiteit Leiden, Versie 2008
- [5] J.P.May, *A concise course in algebraic topology*, University of Chicago press, 1999