M. A. Muller

Divergente Reeksen

Bachelorscriptie

Scriptiebegeleider: dr. O. W. van Gaans

Datum Bachelorexamen: 18-5-2015

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

1. LEIDRAAD

Het eerste hoofdstuk van deze scriptie gaat over het begrip analytische continuatie. In de daaropvolgende hoofdstukken wordt aandacht besteed aan de mogelijkheden om dit concept toe te passen op het sommeren van divergente reeksen. Er zullen verschillende typen analytische continuaties beschouwd worden, die elk gebruikt kunnen worden om dergelijke reeksen te sommeren.

2. ANALYTISCHE CONTINUATIE

Voordat we het over reeksen hebben, zullen we beginnen met een korte uiteenzetting over wat in het algemeen bedoeld wordt met een analytische continuatie van een functie. Daarnaast zullen we enkele voorbeelden geven van analytische gecontinueerde functies.
Definitie: Veronderstel dat f een functie is, die gedefiniëerd is op een niet-lege open deelverzameling U van $\mathbb{C}$. Indien $V \subset \mathbb{C}$ waarvoor ook geldt dat $U \subset V$ en F een analytische functie op V is zodanig dat $F(z) = f(z)$ voor alle $z \in U$, dan noemen we F een analytische continuatie van f.
Een mooie eigenschap van analytische continuaties van functies is dat ze in zekere zin uniek zijn. Preciezer gezegd: Indien V het samenhangende domein is van twee analytische continuaties F_1 en F_2 zodanig dat U bevat is in V en er geldt dat voor alle $z \in U$ dat $F_1(z) = F_2(z) = f(z)$, dan geldt tevens dat $F_1(z) = F_2(z)$ voor alle $z \in V$. [2, p. 228]
Laten we eens kijken naar een concreet voorbeeld: de Gamma functie. De Gamma functie is een analytische continuatie van de functie waarvoor geldt:

$$g : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad n \mapsto (n-1)!,$$

waarbij

$$n! = n \cdot (n-1)!; \quad g(0) = g(1) = 1.$$

Zoals valt op te maken uit deze definitie, kunnen we nu alleen maar de waarden van argumenten vinden voor de gamma functie die positief en geheel zijn. In dit geval geldt dus $U = \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Kan dit domein uitgebreid worden?
Gedurende de 18'e eeuw werd het analytisch continuëren van deze functie naar het reële domein intensief bestudeerd. Dit is een goed voorbeeld van een interpolatieprobleem. Uiteindelijk werd de volgende interpolatie in 1720 gevonden door Euler [5] .
Beschouw de integraal

$$I_n = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Als we deze integraal proberen te bepalen door middel van partiëel integreren, dan vinden we dat

$$I_n = n \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = n I_{n-1},$$

waarbij $I_0 := 1$. Er geldt dus ook dat $I_n = n!$ voor alle positieve gehele getallen n, en dus ook dat $I_n = g(n)$ op U. Op deze manier hebben we dus een functie gevonden die onze oorspronkelijke positieve gehele argumenten interpoleert in de positieve reële getallen. We kunnen g echter ook uitbreiden naar het domein van complexe getallen als we opmerken dat

$$|t^z| = |e^{z \log t}| = e^{(\operatorname{Re} z) \log t} = t^{\operatorname{Re} z} \quad \text{voor } t \geq 0.$$

We kunnen dus n vervangen door de complexe variabele z, en dan is de resulterende integraal $g(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt$ is dus uniform convergent voor $\operatorname{Re} z > -1$. Om historische redenen heeft men de uiteindelijke analytische continuatie van de Gamma functie als volgt gedefiniëerd met een translatie:

$$\Gamma : \mathbb{C}_{\operatorname{Re} z > 0} \to \mathbb{C}, z \mapsto \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Maar hoe zit het met complexe argumenten waarvan het reële gedeelte kleiner is dan nul? Aangezien we bezig zijn met het construeren van een analytische continuatie van de factoriële functie, geldt uiteraard dat

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{voor } z > 0,$$

en dus ook dat

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad \text{voor } z > 0 \text{ en } z \neq 0.$$

Op deze manier hebben we de Gamma functie uitgebreid (en tevens geëxtrapoleerd) naar complexe getallen $z > -1$. Dit proces kunnen we herhalen, om een almaar groter wordend domein te vinden voor de Gamma functie:

(1)

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad \text{voor } \operatorname{Re} z > -1 \text{ en } z \neq 0, \\
&= \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \quad \text{voor } \operatorname{Re} z > -2 \text{ en } z \neq 0, z \neq -1, \\
&= \frac{\Gamma(z+3)}{z(z+1)(z+2)} \quad \text{voor } \operatorname{Re} z > -3 \text{ en } z \neq 0, z \neq -1, z \neq -2, \quad \ldots \\
&= \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+k-1)} \quad \text{voor } \operatorname{Re} z > -k \text{ en } z \neq 0, z \neq -1, \ldots, z \neq -k+1.
\end{aligned}$$

We hebben de Gamma functie nu dus ook uitgebreid [2, p. 236] naar de linkerkant van het complexe vlak. Hiermee is de constructie voltooid. Merk echter wel op dat er geïsoleerde simpele polen zitten in de niet-positieve gehele getallen. In het volgende hoofdstuk zullen we zien dat analytische continuaties een grote rol spelen bij het sommeren van divergente reeksen.

3. Inleiding tot divergente reeksen en notatie

In dit hoofdstuk zal uitgelegd worden wat divergente reeksen precies zijn en wat ermee gedaan kan worden. Er zal ingegaan worden op de in deze scriptie gehanteerde notatie en het zal verduidelijkt worden wat bedoeld wordt met een zogenaamde sommatie van een divergente reeks.

We beginnen echter met het onderwerp "convergente reeksen". Wat is een reeks eigenlijk? Voor elke rij $\{a_n\}$ is de geassocieerde reeks gedefiniëerd als de formele som

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots.$$

Aan een dergelijke reeks kunnen we ook de rij van partiële sommen toekennen. Die is namelijk gedefiniëerd voor elke k als de som van de rij $\{a_n\}$ van a_0 tot a_k. We krijgen dus:

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_k.$$

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert naar een limiet L dan en slechts dan als de geassocieerde reeks van partiële sommen $\{S_k\}$ convergeert naar L. Hier is L een eindige limiet. Als deze limiet niet eindig is of niet bestaat, dan zegt men dat de reeks divergeert. Als deze limiet wel eindig is dan convergeert de reeks dus. Dit wordt als volgt genoteerd:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} S_N = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = L.$$

Formeel gezien betekent dit dat een reeks S convergeert als er een limiet L bestaat, indien voor elk arbitrair klein positief getal $\epsilon > 0$ er een N bestaat zodanig dat voor alle $n \geq N$ geldt dat $|S_n - L| \leq \epsilon$. Voor veel voorbeelden van convergente reeksen is het bekend wat deze eindige limiet L precies is. Nemen we bijvoorbeeld de reeks die hoort bij het rijtje $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{1}{(n+1)^2}\right\}_{n=0}^{\infty}$, dan geldt dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

De evaluatie van deze reeks werd in 1735 door de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler correct vastgesteld, en duidelijk uiteengezet in [6], bijna een eeuw nadat de Italiaanse wiskundige en priester Pietro Mengoli het probleem in 1644 geponeerd had. Dit vraagstuk heet het Bazel-probleem, naar de stad waar Euler en een aantal van zijn leermeesters, die tot de Bernoulli-familie behoorden en ook aan dit probleem hebben gewerkt, gehuisvest waren [4, p. 42].

Zoals de titel van deze scriptie wellicht al doet vermoeden zal er echter met weinig woorden gerept worden over convergente reeksen. Vanaf nu zal er gekeken worden naar reeksen die *niet* convergent zijn. Dergelijke reeksen noemen we *divergent*. Ze hebben dus geen eindige limiet. Een voorbeeld van een divergente reeks is de reeks die geassocieerd word met de rij $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n\}_{n=0}^{\infty}$. Als we de reeks bekijken en de partiële sommen in acht nemen, zien we snel dat deze oneindige som inderdaad niet convergeert naar een eindige limiet:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n &= \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \{S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_{N-1}, S_N\} \\ &= \lim_{N\to\infty} \{1, 3, 7, 15, \dots, S_{N-1}, S_N\}\end{aligned}.$$

Maar wat hebben we aan een reeks die geen eindige limiet heeft? Wat valt er te onderzoeken aan divergente reeksen? Is er überhaupt wat interessants over te melden?

Volgens de gangbare definitie van convergentie is het inderdaad niet mogelijk om een eindige waarde aan een divergente reeks toe te bedelen. Met behulp van bepaalde sommatiemethoden kan dit echter wel. Daar dit wellicht ongeloofwaardig klinkt, zal een demonstratie gegeven worden van een methode waarbij een getal aan een divergente reeks wordt toegekend.

Neem bijvoorbeeld de reeks die we zojuist beschouwd hadden. We hadden al vastgesteld dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ divergent is. Toch beweer ik dat het mogelijk is om op een natuurlijke manier een eindige waarde aan deze reeks "toe te kennen". Beschouw hiertoe de volgende functie:

$$f(x) := 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots,$$

gedefiniëerd voor $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Er geldt dan tevens dat

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 + 2x \cdot (1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots) \\ &= 1 + 2x \cdot f(x).\end{aligned}$$

Nu hebben we een functionale vergelijking verkregen, die we gemakkelijk kunnen oplossen. We vinden dan dat

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}.$$

Dit functievoorschrift heeft betekenis voor alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Vervolgens zien we dat

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -1.$$

Volgens de in de eerste instantie gedefiniëerde versie van $f(x)$ geldt dus ook dat

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n = -1.$$

Vanuit de definitie als limiet van partiële sommen is dit een absurde conclusie. De som van almaar groter wordende positieve getallen zou volgens deze redenering gelijk zijn aan -1.

We hebben hier een andere interpretatie gevolgd. Wat u nu hier hebt aanschouwd is de constructie van een *analytische continuatie* van onze functie f. De functie f convergeerde, in de vorm zoals we die in de eerste instantie toonden, alleen voor $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Middels de tot stand gebrachte analytische continuatie van f kunnen we echter een veel breder scala aan argumenten invullen voor f. De functie is nu goed gedefiniëerd voor alle argumenten $x \in \mathbb{C} \setminus \{1/2\}$. En dus ook voor $x = 1$. Dit betekent niet dat de eerder genoemde divergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ daadwerkelijk *gelijk* is aan -1. Dit komt doordat we met de analytische continuatie van f een nieuwe definitie hebben gekregen van wat f nou eigenlijk is. Alleen op de punten waar de functie in de eerste instantie convergent was, zouden de waarden in die argumenten overeen moeten komen. In de overige argumenten kan de analytische continuatie allerlei waarden aannemen, die volledig losstaan van de oorspronkelijke functie.

We kunnen nu wel zeggen dat we de gevonden waarde -1 *toekennen* aan de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$. De zojuist beschreven analytische continuatie berustte op een zogenaamde *genererende functie*. We zouden dus kunnen stellen dat onder de sommatiemethode, die we met behulp van een genererende functie hebben gevonden, de eerdergenoemde reeks sommeert naar -1. Laten we deze sommatiemethode G noemen. We noteren dan ons resultaat nu als volgt:

$$G\Big(\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\Big) = -1.$$

Deze sommatiemethode G is slechts één van de vele sommatiemethoden die gebruikt kan worden om divergente reeksen te sommeren. In deze scriptie zullen nog een aantal andere sommatiemethoden uiteengezet worden en zullen de verkregen resultaten met elkaar worden vergeleken.

4. Eigenschappen van Sommatiemethoden

In het vorige hoofdstuk maakten we al kennis met één van de vele sommatiemethoden die gebruikt kan worden om divergente reeksen te sommeren. We gaan nu kijken naar de verzameling van alle sommatiemethoden, en daarbij gaan we bepalen welke eigenschappen ze dienen te hebben om als "goed"bestempeld te worden. Beschouw een willekeurige sommatiemethode W, die een divergente reeks D sommeert naar een eindige constante $C \in \mathbb{C}$. Een sommatiemethode W is dus eigenlijk een functie die waarden toewijst aan bepaalde reeksen. Het is wenselijk dat een dergelijke sommatiemethode W aan de volgende eigenschappen voldoet [12, p. 5]:

(1) Regulariteit. Een sommatiemethode W heet *regulier* indien, wanneer een reeks R zo is dat $W(R)$ gedefiniëerd is en convergeert naar C, er tevens geldt dat $W(R) = C$. Deze eigenschap geeft dus eigenlijk aan dat de sommatiemethode compatibel is met de daadwerkelijke convergentiewaarde, indien de reeks toch niet divergent blijkt te zijn.

(2) Lineariteit. Een sommatiemethode W heet *lineair* indien voor willekeurige scalaire getallen p, k (die bijvoorbeeld in $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ zitten) en voor twee willekeurige divergente reeksen D_1, D_2 waarvoor $W(D_1)$

en $W(D_2)$ gedefiniëerd zijn, er geldt
dat $W(p \cdot D_1 + k \cdot D_2)$ gedefiniëerd is en $W(p \cdot D_1 + k \cdot D_2) = p \cdot W(D_1) + k \cdot W(D_2)$.

(3) Stabiliteit. Indien een reeks D begint met d_0 en D' de reeks is die verkregen wordt door de eerste term van de oorspronkelijke reeks van de rest af te halen, zodanig dat $d'_n = d_{n+1}$, dan is $W(D)$ *alleen* gedefiniëerd dan en slechts dan als $W(D')$ gedefiniëerd is, en er geldt dat $W(D) = d_0 + W(D')$. Wanneer dit het geval is, heet de methode W *stabiel*.

Er wordt over het algemeen minder waarde gehecht aan de derde eigenschap. De zogenoemde "Borel Methode", een bekende sommatiemathode, bezit deze eigenschap bijvoorbeeld niet [9].

5. Een concreet voorbeeld: de Fibonacci reeks

We gaan nu de Fibonacci reeks sommeren met behulp van een aantal sommatie-methoden. Hierdoor wordt het inzichtelijk hoe deze sommatiemethoden werken en kunnen we tot op zekere hoogte vaststellen of er enige samenhang tussen de verschillende methoden is.

De Fibonacci reeks definiëren we als volgt:

$$F := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

, en we starten met de
beginvoorwaarden $f_0 = 0, f_1 = 1$.

We kunnen deze reeks bijvoorbeeld sommeren met de eerdergenoemde sommatiemethode: de genererende functie [15, p. 8 – 9]. We willen dus de waarde van $G(F)$ bepalen. Hiertoe definiëren we eerst de functie

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$$

Middels een aantal algebraïsche operaties vinden we vervolgens het volgende:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= f_0x^0 + f_1x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} f_nx^n \\
&= 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(f_{n-2} + f_{n-1})x^n \\
&= x + x^2\Big(\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}x^{n-2}\Big) + x\Big(\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1}x^{n-1}\Big) \\
&= x + x^2\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_nx^n\Big) + x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_nx^n\Big) \\
&= x + x^2\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_nx^n\Big) + x\Big(-f_0x^0 + \big(f_0x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_nx^n\big)\Big) \\
&= x + x^2g(x) + x\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_nx^n\Big) \\
&= x + x^2g(x) + xg(x) \quad .
\end{aligned} \tag{2}
$$

Ook nu hebben we een functionale vergelijking verkregen, die we wederom gemakkelijk kunnen oplossen. We vinden al gauw dat

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Op basis hiervan kunnen we dus concluderen dat

$$G(F) = \lim_{x \to 1} g(x) = \frac{1}{1 - 1 - 1^2} = -1.$$

Nu we ons enigszins vertrouwd hebben met de sommatiemethode die gebruikt maakt van een genererende functie om een eindige waarde aan een divergente reeks toe te kennen, kunnen we overgaan op een nieuwe methode om divergente reeksen te sommeren.

Deze nieuwe methode berust op de zogeheten *zeta functie regularisatie* van een reeks.

Stel, we willen deze methode, die we R noemen, gebruiken om de reeks

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

te sommeren. Dan beschouwen we de bijbehorende functie

$$r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n)^x},$$

waarbij de a_n positief moeten zijn. Als deze laatste reeks convergeert voor grote reële waarden voor x en analytisch gecontinuëerd kan worden langs de lijn $x = -1$, dan noemen we de waarde van onze functie in $x = -1$ de zeta geregulariseerde som van onze oorspronkelijke reeks S.

We kunnen deze sommatiemethode ook toepassen op de Fibonacci Reeks. Hiervoor gebruiken we Binets Formule voor het n'de Fibonacci getal. Deze formule luidt als volgt. Laat $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, en laat $\phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Dan geldt, volgens de formule van Binet, het volgende (zie pagina zes):

$$f_n = \frac{\phi^n - \phi'^n}{\sqrt{5}}.$$

Vervolgens kunnen we het Binomium van Newton gebruiken om het n'de Fibonacci getal, dat verheven is tot de p'de macht, te vinden.

$$\begin{aligned} {f_n}^p &= \Big(\frac{\phi^n - \phi'^n}{\sqrt{5}}\Big)^p = 5^{-\frac{p}{2}}\phi^{np}\Big(1 - (\frac{\phi'}{\phi})^n\Big)^p \\ &= 5^{-\frac{p}{2}}\phi^{np}\Big(1 - (-1)^{n+1}\frac{1}{\phi^{2n}}\Big)^p \\ &= 5^{-\frac{p}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(-1)^{(n+1)k}\phi^{n(p-2k)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Op basis hiervan kunnen we dus vaststellen dat

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} {f_n}^{-x} = 5^{\frac{x}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-x}{k}(-1)^{k(n+1)}\phi^{-n(x+2k)}.$$

Hierbij hanteren we de definitie

$$\binom{x}{k} := \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(x-k+1)} \quad \text{voor } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}.$$

Door de volgorde te verwisselen van n en k, verkrijgen [10, p. 411 – 412] we vervolgens dat

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 5^{\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-x}{k}(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\Big((-1)^k\phi^{-(x+2k)}\Big)^n \\ &= 5^{\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-x}{k}(-1)^k\frac{(-1)^k\phi^{-(x+2k)}}{1-(-1)^k\phi^{-(x+2k)}} \\ &= 5^{\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-x}{k}\frac{1}{\phi^{x+2k}+(-1)^{k+1}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Ten slotte kunnen we de limiet bepalen om het verlangde resultaat te verkrijgen:

$$R(F) = \lim_{x\to-1}\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{\phi^{-1}-1} + \frac{1}{\phi+1}\Big) = -1.$$

Merk op dat de G en R methoden op hetzelfde resultaat uitkomen:

$$G(F) = -1 = R(F).$$

6. EEN AANTAL BEKENDE REEKSEN

We gaan nu de hiervoor benoemde sommatiemethoden gebruiken om een aantal bekende reeksen te sommeren. Een voor de hand liggend voorbeeld is de som van de natuurlijke getallen:

$$N := \sum_{n=1}^{\infty} n.$$

Voor de eerstgenoemde methode bepalen we eerst de bijbehorende genererende functie:

$$n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Deze is gemakkelijk te vinden. We beginnen eerst met het vinden van de volgende verwante functie

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= 1 + x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\Big) \qquad (5) \\ &= 1 + xq(x). \end{aligned}$$

Als we deze functionale vergelijking oplossen, zien we snel dat

$$q(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Merk op dat er geldt dat $n(x) = xq'(x)$, dus

$$n(x) = x\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{1-x}\Big] = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Nu stuiten we echter op een probleem. We zien snel dat $\lim_{x\to 1} n(x)$ niet bestaat! Dit betekent dat de natuurlijke getallen niet sommeerbaar zijn met behulp van deze methode. Zouden we meer geluk hebben met de zeta functie regularisatie methode?
De Riemann zeta functie is gedefiniëerd door de reeks

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Hierbij geldt dat $s = \sigma + it$ en $\sigma > 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Middels de functionale vergelijking

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s),$$

die geldt [11] voor alle $s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ en ons dus ook verschaft met een analytische continuatie van de Riemann zeta functie, kunnen we N wel evalueren:

$$\begin{aligned} R(N) = \zeta(-1) = \zeta(1-2) &= 2(2\pi)^{-2}\cos(1/2\cdot\pi\cdot 2)\Gamma(2)\zeta(2) \\ &= 2\cdot\frac{1}{4\pi^2}\cdot(-1)\cdot 1\cdot\frac{\pi^2}{6} \qquad (6) \\ &= -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Merk hierbij op dat we gebruik hebben gemaakt van de eerdergenoemde identiteit $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Een mooi resultaat, maar toch knaagt er iets. Bij de Fibonacci reeks hadden we juist zo'n mooi consistent resultaat gevonden: de twee verschillende sommatiemethoden kwamen met elkaar overeen. Hier is dat duidelijk niet het geval.

7. Dirichlet sommatie

In dit hoofdstuk zullen we de derde en daarmee laatste sommatiemethode bespreken. Ook deze methode berust op een bepaalde manier van het analytisch continuëren van bijbehorende functies. Dirichlet reeksen zijn functies van de vorm

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},$$

waarbij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ een complexe rij is en $s \in \mathbb{C}$ zo dat de reeks convergeert. De hiervoor besproken Riemann zeta functie is een erg bekend voorbeeld van een Dirichlet reeks. Daarvoor geldt dat $a_n = 1$ voor alle n. De Riemann zeta functie komt erg vaak voor bij het vinden van uitdrukkingen voor andere Dirichlet reeksen.
Laten we bijvoorbeeld de Dirichlet reeks bepalen die hoort bij de zogenaamde Möbius functie, die als volgt gedefiniëerd wordt [7, p. 66]:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{als } p^2|n \text{ voor één of andere priemgetal } p \\ (-1)^r & \text{als } n \text{ het product is van } r \text{ verschillende priemfactoren} \end{cases}$$

Met behulp van de bijbehorende dirichlet reeks

$$m(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$$

willen we dus de som

$$M = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(n) = 1 - 1 - 1 + 0 - 1 + 1 + \ldots$$

evalueren, door de limiet

$$\lim_{s \to 0} m(s)$$

te bepalen voor één of andere analytische continuatie van de functie m. We noemen dit de D-sommatiemethode.
De vraag is: hoe gaan we deze nieuwe uitdrukking vinden? Hiervoor gebruiken we een speciale techniek die "Dirichlet convolutie"heet [7, p. 64]. In het algemeen werkt deze techniek als volgt: Laat $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Functies die een dergelijk domein en co-domein hebben, noemen we getalkundige functies. Voor een willekeurige getalkundige funcie f definiëren we de bijbehorende Dirichlet reeks als volgt:

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}.$$

Vervolgens definiëren we een nieuwe getalkundige functie $f \star g$, die we de Dirichlet convolutie van f en g noemen, als volgt:

$$\begin{aligned} (f \star g)(n) &= \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{ab=n} f(a) g(b) \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

Hier gaat de som over alle positieve delers d van n, ofwel over alle verschillende paren (a, b) van positieve gehele getallen waarvan het product gelijk is aan n. We definiëren de constante functie E als volgt:

$$E : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, k \mapsto 1 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Verder kunnen we het volgende lemma gebruiken [8]:

Lemma 1.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & als\ n = 1 \\ 0 & als\ n > 1 \end{cases} .$$

Bewijs. Voor $n = 1$ is dit snel duidelijk: $\mu(1) = 1$. Laat vervolgens $n > 1$ een willekeurig geheel getal zijn. Schrijf

$$n = p^k \cdot {q_1}^{l_1} \cdot \dots \cdot {q_k}^{l_k},$$

waarbij $q_i \neq p$ voor alle $1 \leq i \leq n$. Definiëer vervolgens $m = {q_1}^{l_1} \cdot \dots \cdot {q_k}^{l_k}$. Dan geldt: $n = m \cdot p^k$ en m is geen veelvoud van p.
Vervolgens doen we hetzelfde voor $d \in \mathbb{N}_{>0}$. Laat l het aantal factoren p zijn in de priemfactorontbinding van d:

$$d = f \cdot p^l,$$

waar $p \nmid f$. Er geldt dan dan $d|n \iff f \cdot p^l | m \cdot p^k \iff l \leq k$ én $f|m$. Dit betekent dat

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{f \cdot p^l : f \cdot p^l} \mu(f \cdot \mu^l) = \sum_{f \cdot p^l : 1 \leq l \leq k, f|m} \mu(f \cdot p^l) = \sum_{k=0}^{K} \sum_{f|m} \mu(p^k f).$$

Ten slotte geldt dat

$$\sum_{k=0}^{K} \sum_{f|m} \mu(p^k f) = \sum_{f|m} \Big(\mu(p^0 \cdot f) + \mu(p^1 f) \Big) + \sum_{k>1} \sum_{f|n} \mu(p^k f).$$

Deze tweede dubbele som komt te vervallen, omdat er hogere machten van dezelfde priemfactor in de Möbius functie worden gestopt. Die termen worden dus allemaal nul. Dan kijken we naar de eerste som. Stel dat f in totaal r verschillende priemfactoren heeft, dan heeft $p \cdot f$ in totaal $r+1$ verschillende priemfactoren. We weten dat $\mu(f) = (-1)^r$, en dat $\mu(p \cdot f) = (-1)^{r+1}$. Er geldt dus dus $\mu(pf) = -\mu(f)$, dus de eerste som komt ook te vervallen. Voor $n > 1$ wordt de som dus altijd gelijk aan nul. Hiermee hebben we gevonden wat we wilden bewijzen. $\square$

Op basis van dit resultaat kunnen we snel concluderen dat

$$\mu \star E = e,$$

waar

$$e(n) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Vervolgens gebruiken we het volgende resultaat [7, p. 66]:

Lemma 2. *Voor twee getalkundige functies f en g geldt er dat $L_f(s) \cdot L_g(s) = L_{f \star g}(s)$*

Bewijs.

$$\begin{aligned} L_f(s) L_g(s) &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} \Big) \Big(\sum_{m=1}^{\infty} g(m) m^{-s} \Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(n) g(m) (nm)^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{nm=k} f(n) g(m) \Big) k^{-s} \qquad (8) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (f \star g)(k)^{-s} = L_{f \star g}(s). \end{aligned}$$

$\square$

Dit resultaat is erg handig omdat het hierdoor duidelijk is dat

$$L_E(s) \cdot L_\mu(s) = L_{\mu \star E} = L_e(s) = 1.$$

Aangezien $L_E(s) = \zeta(s)$, vinden we dus dat

$$L_\mu(s) = \zeta(s)^{-1}.$$

Hierdoor kunnen we de divergente reeks van de som van de termen van de Möbius functie gemakkelijk evalueren:

$$D(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) = \lim_{s \to 0} \zeta(s)^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.$$

Een veelgebruikte methode voor Dirichlet reeksen is de zogenaamde "Möbus Inversie Formule". Deze formule zegt het volgende [7, p. 65]:

Theorem 7.1 (Möbius Inversie Formule)**.** *Laat f een getalkundige functie zijn. Definiëer $F(n) := \sum_{d|n} f(n)$ voor $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dan geldt:*

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) F(d) \quad \textit{voor } n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Bewijs. Er geldt dat $F = E \star f$, dus er geldt ook dat

$$\mu \star F = \mu \star (E \star f) = (\mu \star E) \star f = e \star f = f.$$

□

Deze formule kunnen we goed gebruiken om een andere divergente reeks te sommeren, waarvan de termen gerelateerd zijn aan de zogenoemde Euler Totiënt Functie. Deze functie is als volgt gedefiniëerd: $\phi(n) := \#\{k \in \mathbb{Z} : 1 \leq k \leq n, \gcd(k,n) = 1\}$. Voor de te sommeren reeks

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(n)$$

hebben we echter eerst het volgende lemma nodig [16]:

Lemma 3. $\sum_{d|n} \phi(d) = n$ *voor* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Bewijs. Laat n een positief geheel getal zijn. Construeer de breuken

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$$

en reduceer ze allemaal naar de laagste termen. (Dus stel bijvoorbeeld dat $n = 20$, dan zouden we de breuk $\frac{4}{20}$ moeten reduceren tot $\frac{1}{5}$.) Beschouw één van de gereduceerde breuken $\frac{a}{d}$. We weten hiervan dat $d|n$, dat $a \leq d$ en dat $\gcd(a,d) = 1$ (aangezien we de breuk hebben gereduceerd).
Merk op dat wanneer $\frac{a}{d}$ een breuk is met een positieve teller en een positieve noemer waarvoor geldt dat $d|n$, $a \leq d$ en $\gcd(a,d) = 1$, dan is deze breuk gereduceerd naar de laagste termen. We weten namelijk dat $dk = n$ voor één of andere k, en dus geldt ook dat $\frac{a}{d} = \frac{ka}{kd} = \frac{ka}{n}$. De laatste breuk is teruggebracht naar naar zijn oorspronkelijke staat.
Hoeveel gereduceerde breuken hebben d in de noemer? Aangezien de teller a een positief geheel getal is dat relatief priem is ten opzichte van d, zijn er $\phi(d)$ van zulke breuken. Als we sommeren over alle d's die n delen, dan krijgen we de som $\sum_{d|n} \phi(d)$. Omdat elke gereduceerde breuk echter één of

andere d in de noemer heeft, neemt deze som alle breuken in acht. Hiervan zijn er n. Daarom geldt er dat $\sum_{d|n} \phi(d) = n$. $\square$

Indien we definiëren dat $I_\alpha(n) = n^\alpha$ kunnen we met behulp van dit lemma zien we snel dat

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d)d = \mu \star I_1.$$

Vervolgens passen we weer Lemma 1 toe, waarbij we in acht nemen dat $L_{I_1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \zeta(s-1)$, en dus dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi(n) n^{-s} = L_\phi(s) = L_{\mu \star I_1}(s) = L_\mu(s) L_{I_1}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

We vinden dus dat

$$D(\Phi) = \lim_{s \to 0} \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \frac{-\frac{1}{12}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}.$$

Met behulp van Dirichlet Convolutie in het algemeen en de Möbius Inversie Formule in het bijzonder kunnen we talloze divergente reeksen sommeren, die het resultaat zijn van één of andere convolutie van getalkundige functies. Een aantal andere voorbeelden zullen we bespreken in Hoofdstuk 8.

8. OVERZICHT VAN GESOMMEERDE REEKSEN EN DE BIJBEHORENDE SOMMATIEMETHODEN

In dit hoofdstuk wordt een overzicht gepresenteerd van een aantal divergente reeksen, en wat hun sommatiewaarden zijn als ze met een bepaalde methode worden gesommeerd.

Genererende Functie Methode

Voor de Catalan getallen c_n hebben we de genererende functie [15, p. 53, (2.5.10)]:

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} z^n = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} \quad ,$$

dus de waarde is

$$G(T) = \lim_{z\to 1} T(z) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{\pi i}{3}} \quad .$$

Voor de Motzkin getallen geldt [13, p. 1]:

$$Mk(z) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n z^n = \frac{1-z-\sqrt{1-2z-3z^2}}{2z^2} \quad ,$$

waar het n'de Motzkin getal m_n bepaald kan worden middels de volgende recurrentierelatie [13]:

$$(n+2)m_n = (2n+1)m_{n-1} + 3(n-1)m_{n-2} \quad .$$

Hiermee kunnen we bepalen dat

$$G(Mk) = \lim_{z\to 1} Mk(z) = -i.$$

Tevens hebben we de eerder bepaalde machtreeks voor de Fibonacci-getallen:

$$F_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2} \quad ,$$

waarmee we vinden dat

$$G(F_1) = \lim_{z\to 1} F_1(z) = -1 \quad .$$

Ten slotte hebben we nog de Schröder getallen s_n, met de genererende functie

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n z^n = \frac{1-z-\sqrt{1-6z+z^2}}{2z} \quad ,$$

waarbij het n'de Schröder getal wordt gegeven middels de recurrentierelatie die deze getallen direct relateert aan de Catalan getallen [3, p. 1]:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{k} c_{n-k} \quad ; \quad n \geq 0.$$

We vinden dus de sommatiewaarde

$$G(S) = \lim_{z \to 1} S(z) = -i \quad .$$

Zeta Functie Regularisatie

Bekijk de (machten van de) positieve gehele getallen, die we vinden met de volgende uitdrukking [1, p. 266] voor de Riemann Zeta functie

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1} \quad ,$$

waar B_n het n'de Bernoulli-getal is. Deze getallen kunnen bijvoorbeeld middels de recursieve formule

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

(en $B_0 = 1$) bepaald worden [1, p. 265]. Hiermee vinden we onder andere de waarde

$$Z(N) = \lim_{s\to 1} \zeta(-s) = \frac{B_2}{2} = -\frac{1}{12} \quad .$$

Daaropvolgend hebben we de Dirichlet Eta Functie, de alternerende versie van de Riemann Zeta functie. Hiermee kunnen we reeksen evalueren die machten zijn van natuurlijke getallen:

$$\eta(-m) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^m = (1 - 2^{1+m})\zeta(-m) = -(1 - 2^{1+m})\frac{B_{m+1}}{m+1} \quad .$$

Als we bijvoorbeeld de reeks van de positieve gehele getallen als volgt definiëren:

$$A = 1 - 2 + 3 - 4 \dots \quad ,$$

dan krijgen we dus

$$Z(A) = \lim_{s\to 1} \eta(-s) = \frac{1}{4} \quad .$$

Voor de Fibonacci-getallen krijgen we, zoals eerder gedemonstreerd en gevonden in [10, p. 411 - 412]:

$$F_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} {f_n}^{-s} = 5^{\frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{1}{\phi^{s+2k} + (-1)^{k+1}} \quad .$$

Hiermee vinden we dat

$$R(F_2) = \lim_{s\to -1} F_2(s) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\phi^{-1} - 1} + \frac{1}{\phi + 1} \right) = -1 \quad .$$

Dirichlet Reeks Methode

We hadden al de volgende uitdrukking gevonden voor de getallen die voortkomen uit de Möbius functie:

$$M(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \zeta(s)^{-1} \quad ,$$

en daarmee gevonden dat

$$D(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) = \lim_{s \to 0} \zeta(s)^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \quad .$$

Tevens weten we dat

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(n) n^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \quad ,$$

(waar ϕ de Euler Totiënt functie is), dus

$$D(\Phi) = \lim_{s \to 0} \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \frac{-\frac{1}{12}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \quad .$$

Een andere reeks die we kunnen sommeren met deze methode, is de reeks die geassocieerd is met de *von Mangoldt* functie. Deze functie is als volgt gedefiniëerd [1, p. 32]:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{als } \; n = p^k \text{ voor één of ander priemgetal } p \text{ en een } k \geq 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Er geldt dat

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \quad ,$$

dus

$$D(L) = \lim_{s \to 0} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{-\frac{1}{2}\ln(2\pi)}{-\frac{1}{2}} = \ln(2\pi) \quad .$$

Als n een positief geheel getal is en $\Omega(n)$ het aantal priemfactoren van n is, dan wordt de Liouville functie $\lambda(n)$ als volgt gedefiniëerd [1, p. 37]:

$$\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)} \quad .$$

Hiervoor geldt dat

$$V(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \quad .$$

We vinden dus dat

$$D(V) = \lim_{s \to 0} \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1 \quad .$$

Ten slotte hebben we nog enkele uitdrukkingen [14, p. 5] die te maken hebben met de deelfunctie, die als volgt gedefniëerd is:

$$\sigma_x(n) = \sum_{d|n} d^x \quad .$$

Er geldt dat

$$S_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = (\zeta(s))^2 \quad ,$$

dat

$$S_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} = \frac{(\zeta(s))^3}{\zeta(2s)} \quad ,$$

en ten slotte dat

$$S_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)^2}{n^s} = \frac{(\zeta(s))^4}{\zeta(2s)} \quad .$$

Op basis van deze gelijkheden vinden we de sommaties

$$D(S_1) = \lim_{s\to 0} (\zeta(s))^2 = \frac{1}{4} \quad ,$$

en

$$D(S_2) = \lim_{s\to 0} \frac{(\zeta(s))^3}{\zeta(2s)} = \frac{1}{4} \quad ,$$

en als laatste dat

$$D(S_3) = \lim_{s\to 0} \frac{(\zeta(s))^4}{\zeta(2s)} = -\frac{1}{8} \quad .$$

Referenties

[1] Tom M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[2] Joseph Bak, Donald J. Newman, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2'nd edition, 1997.

[3] Eva Y.P. Deng, Wei-Jun Yan, Some identities on the Catalan, Motzkin and Schöder numbers, *Discrete Applied Mathematics* **14**, 28 Juli 2008, 2781 - 2789.

[4] William Dunham, *Euler: the Master of us All*, 1999.

[5] Leonhard Euler, *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **5**, 1738, 36-57, 1729.

[6] Leonhard Euler, *Démonstration de la somme de cette suite* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} +$ *etc.* Journ. lit. d'Allemagne, de Suisse et du Nord, 2:1, 115-127, 1743.

[7] Jan-Hendrik Evertse, *College Dictaat Analytische Getallentheorie*, Universiteit Leiden, Fall 2014.

[8] Daniel Fischer, Math Stackexchange, *http://math.stackexchange.com/questions/932682/why-is-mu-star-e-e-where-star-denotes-the-dirichlet-convolution-opera*, September 15, 2014.

[9] E. B. Muraev, *Borel summation of n-multiple series, and entire functions associated with them*, Akedemiya Nauk SSSR **19** (6): 1332-1340, 1438, 1978.

[10] Luis Navas, *Analytic Continuation of the Fibonacci Dirichlet Series*, Fibonacci Q. **39** , 409 - 418, 2001.

[11] Bernhard Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einen gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859, Transcribed by D. R. Wilkins, December 1998.

[12] Christiane Rousseau, *Divergent series: past, present, future...*, December 17, 2013.

[13] Matthias Schork, On the recursion relation of Motzkin numbers of higher rank, *Online Journal of Analytic Combinatorics* **2** n. 3, 2004.

[14] E.C. Titschmarsh, D.R. Heath-Brown, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Oxford University Press, 1986.

[15] Herbert S. Wilf, *Generatingfunctionology*, A K Peters/CRC Press; 3'rd edition, 2005.

[16] (Onbekende Auteur), *The Euler Phi Function*, website of ae.hc.cust.edu, see the multiplicative functions pdf, (Onbekende datum).